НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

По порученію начальства морскаго кадетскаго корпуса

составилъ

А. Дмитріевъ.

Одобрено ученымъ комитетомъ министерства народнаго просвѣщенія и ученымъ комитетомъ Святѣйшаго Сунода.

Изданіе четвертое

(десятая тысяча).

съ двумя таблицами чертежей
и съ четырьмя политипажами.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи А. Якобсона (Вас. Остр., 9 лин. № 8).

1872.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 26 Іюля 1871 г.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

При составленіи предлежащаго руководства, ограничиваясь курсомъ среднихъ учебныхъ заведеній, я имѣлъ главною цѣлію соединить наглядность графическихъ пріемовъ синтетическаго способа съ аналитическою общностію тригонометрическихъ выводовъ. Желая, по возможности, упрощать доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ, я не считалъ необходимымъ придерживаться одной какой либо математической методы, но преимущественно имѣлъ въ виду, какъ теоретическую, такъ и практическую часть излагать со всевозможною ясностію и точностію, и къ искомымъ результатамъ идти всегда путемъ кратчайшимъ.

Вотъ причина, по которой я долженъ быть прибѣгать попеременно то къ алгебрическимъ выкладкамъ, то къ графическимъ построеніямъ; иногда же пользовался и обоими способами вмѣстѣ.

При доказательствахъ и опредѣленіяхъ старался начинать изложеніе съ видимаго, нагляднаго, простаго и потомъ постепенно переходить къ отвлеченному.

Отсюда понятно, почему при опредѣленіи тригонометрическихъ функцій — (соглашаясь съ мнѣніемъ нѣкоторыхъ германскихъ педагоговъ, а въ томъ числѣ и Мюллера, профессора Фрейбургскаго университета) — я начиналъ съ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ дугъ, т. е. разсматривалъ тригонометрическія величины какъ *линіи*, и потомъ уже, черезъ отношеніе ихъ къ радіусу той же дуги, получалъ *отвлеченное число*, т. е. тригонометрическую величину угла. Этимъ пріемомъ я старался показать взаимную связь и тожество обоихъ опредѣленій, получаемыхъ отъ разсматриванія тригонометрическихъ величинъ дугъ и угловъ.

Желая показать зависимость между тригонометрическими способами рѣшенія треугольниковъ и геометрическимъ ихъ построеніемъ, я считалъ полезнымъ упомянуть прежде о графическихъ способахъ при этомъ употребляемыхъ, показать ихъ неточности, и потомъ уже перейти къ рѣшенію помощію тригонометрическихъ величинъ. Для каждой изъ

главныхъ задачъ показанъ сперва способъ вычисленія *безъ логариѳмовъ*, а потомъ, въ параллель, вычисленіе *помощію логариѳмованія формулъ.* При этомъ дѣлалось необходимымъ нѣсколько подробнѣе развить статью: *обращеніе нелогариѳмическихъ формулъ въ логариѳмическія* и показать простѣйшіе пріемы для *рѣшенія тригонометрическихъ уравненій.* Упомянутые нами *способы вычисленія безъ логариѳмовъ* весьма часто употребляются при техническихъ работахъ, при кораблестроеніи, въ физикѣ, въ практической механикѣ, а также при вычисленіи по нѣкоторымъ нелогариѳмическимъ формуламъ, въ особенности же въ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется большой точности рѣшеній.

При вычисленіи треугольниковъ я пользовался преимущественно стереотипными шестизначными таблицами, изданными морскимъ корпусомъ (*); ссылаясь на эти таблицы, я помѣстилъ въ моемъ руководствѣ только тѣ подробности, которыхъ нѣтъ въ предварительныхъ объясненіяхъ къ 1-му и 2-му изданіямъ этой книги; считаль также полезнымъ въ концѣ надаваемаго мною руководства, въ видѣ прибавленій, помѣстить натуральныя тригонометрическія величины, свѣренныя по таблицамъ Мюллера, Гюльзе и Гоуеля, и пополненныя длиною дугъ въ доляхъ радіуса; этими таблицами я и пользовался при вычисленіи треугольниковъ безъ помощи логариѳмовъ.

Для развитія въ учащихся самодѣятельности и самостоятельнаго мышленія, къ каждому отдѣлу приложено множество численныхъ примѣровъ, задачъ и формулъ, болѣе или менѣе примѣнимыхъ къ разнымъ отраслямъ знаній. Помощію этихъ упражненій открывается возможность занимать учащихся внѣ класснаго времени по мѣрѣ развитія силъ и способностей каждаго, и наконецъ, тѣмъ изъ нихъ, въ которыхъ болѣе обнаружится склонности къ математикѣ, дать средства усвоить себѣ начальныя основанія этой науки въ такой степени и въ такомъ объемѣ, чтобы дальнѣйшее изученіе другихъ соприкосновенныхъ съ тригонометріею наукъ не могло представить потомъ особыхъ затрудненій.

Согласуясь съ гимназическою программою тригонометріи, изданною министерствомъ народнаго просвѣщенія, я предложилъ краткое описаніе

(*) Статья объ употребленіи ихъ составлена г. профессоромъ I. И. Сомовымъ. Цѣна этихъ таблицъ 60 коп. за экземпляръ, слѣдовательно значительно дешевле таблицъ Веги, изд. Бремикеромъ.

простѣйшихъ инструментовъ, употребляемыхъ при землемѣріи, и показалъ способъ рѣшенія главнѣйшихъ задачъ практической тригонометріи; въ прибавленіяхъ же изложилъ основныя понятія о съемкѣ плановъ и нивеллировкѣ.

При напечатаніи этого руководства употреблены мною два шрифта: крупный составляетъ одно непрерывное цѣлое; это обязательный курсъ элементарныхъ знаній, какъ въ морскомъ корпусѣ, такъ и въ гимназіяхъ; мелкимъ шрифтомъ напечатаны статьи, которыя хотя и не заключаютъ въ себѣ знаній существенно необходимыхъ для общаго курса, но, содѣйствуя большему развитію учащихся, могутъ служить для ознакомленія съ подробностями этой науки. Въ подстрочныхъ замѣчаніяхъ и въ выноскахъ помѣщены мною: 1) замѣтки изъ исторіи математики, 2) дупликаты опредѣленій, доказательствъ теоремъ и рѣшеній задачъ, 3) библіографическія указанія на сочиненія, въ которыхъ учащіеся могутъ найти болѣе полное изложеніе той или другой статьи.

При составленіи этого учебника я пользовался всѣмъ, что могъ найти лучшаго по этой части какъ въ русской, такъ и въ иностранныхъ литературахъ: Лакруа, Лежандръ, Рено, Gerono, Serret, Cagnoli, Müller, Wiegand, Pauker, Prestel, Dienger и многіе другіе служили мнѣ руководствомъ.

Наконецъ считаю долгомъ выразить мою глубочайшую признательность гг. академикамъ В. Я. Буняковскому и І. И. Сомову, которые, по порученію начальства морскаго корпуса разсматривая это руководство, вмѣстѣ съ одобрительнымъ отзывомъ о трудѣ моеми сообщили мнѣ нѣсколько весьма полезныхъ замѣчаній; по совѣтамъ гг. академиковъ однѣ статьи этого учебника были отчасти измѣнены, другія совершенно передѣланы.

Приношу также мою благодарность г. профессору С.-Петербургскаго университета А. Н. Коркину, совѣтами котораго я пользовался при составленіи мною курса тригонометрій, какъ прямолинейной, такъ и сферической.

Второй отдѣлъ издаваемаго мною учебника, заключающій въ себѣ сферическую тригонометрію, напечатанъ отдѣльно.

А. Дмитріевъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ

ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

Предисловіе.

ГЛАВА I.

О тригонометрическихъ величинахъ. (Гоніометрія).

§ 1. 1) Предметъ тригонометріи. Раздѣленіе ея на плоскую, или прямолинейную, и сферическую.
2) Неудобства графическихъ пріемовъ при вычисленіи треугольниковъ; зависимость частей треугольника отъ данныхъ сторонъ и угловъ. Значеніе тригонометрическихъ величинъ . . . . Стран. 1—3.

§ 2. Дѣленіе окружности. Дуги или углы дополнительные до 90° (complément), исполнительные до 180° (supplément) и обращенные или пополнительные до 360° (reverses) . 3—4.

§ 3. Геометрическое значеніе положительныхъ и отрицательныхъ величинъ. Обозначеніе точки на плоскости . . 4—8.

§ 4. 1) О тригонометрическихъ величинахъ.
Тригонометрическія линіи дугъ. Положительность и отрицательность тригонометрическихъ линій.
2) Отношеніе тригонометрической линіи дуги къ ея радіусу, при томъ же углѣ, есть величина постоянная.
3) Тригонометрическія величины выраженныя числомъ. Взаимная связь тригонометрическихъ величинъ дуги и угла; тожественность выводовъ при извѣстныхъ положеніяхъ. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ угла . . . . 8—16.

§ 5. 1) Соотносительныя величины (valeurs corrélatives). Изслѣдованіе величинъ тригонометрическихъ линій и ихъ положеній въ разныхъ четвертяхъ окружности круга.
2) Періодичность тригонометрическихъ линій.
3) Тригонометрическія линіи отрицательныхъ дугъ.
4) Тригонометрическія линіи дугъ исполнительныхъ до 180° и до 270°.
5) Взаимная связь между тригонометрическими величинами вообще.
6) Таблица тригонометрическихъ линій въ разныхъ четвертяхъ круга, при дугахъ въ 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.
7) О дугахъ и углахъ, соотвѣтствующихъ даннымъ тригонометрическимъ величинамъ . . . . 16—24.

§ 6. 1) Основныя тригонометрическія формулы простыхъ дугъ. Разборъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ. Стран.
2) Общее изслѣдованіе главнѣйшихъ формулъ. . . . 24—28.
§ 7. Сложныя тригонометрическія формулы: суммы и разности угловъ, угловъ кратныхъ и частей угловъ, суммы и разности тригонометрическихъ величинъ и взаимныя ихъ отношенія. . . . . 28—38.
§ 8. Понятіе о составленіи тригонометрическихъ таблицъ. Употребленіе таблицъ логариѳмовъ чиселъ и тригонометрическихъ величинъ. . . . . 38—54.

ГЛАВА II.

Вычисленіе треугольниковъ. (**Тригонометрія**).

§ 9. Графическіе способы для рѣшенія треугольниковъ; инструменты для того употребляемые: масштабъ линейный, транспортиръ, масштабъ хордовой и масштабы тригонометрическихъ линій. Недостаточность графическихъ способовъ для точныхъ рѣшеній. . . . . 55—60.
§ 10. Основныя теоремы для вычисленія прямоугольныхъ треугольниковъ. Формулы для частныхъ случаевъ. . . 60—63.
§ 11. Вычисленіе прямоугольныхъ треугольниковъ. Число возможныхъ случаевъ при заданіи. Примѣры и задачи на каждое изъ предложенныхъ правилъ , ... 63—71.
§ 12. Основныя теоремы для рѣшенія косвенноугольныхъ треугольниковъ. Формулы на частные случаи. Вспомогательные углы; преобразованіе нелогариѳмическихъ формулъ въ логариѳмическія; рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій . . . . 71—86.
§ 13. Вычисленіе косвенноугольныхъ треугольниковъ. Число возможныхъ случаевъ при заданіи. Изслѣдованіе главнѣйшихъ формулъ. Примѣры и задачи на каждое изъ предложенныхъ правилъ . . . . 86—95.
§ 14. Частные случаи при рѣшеніи треугольниковъ. Вычисленіе площадей треугольниковъ прямоугольныхъ и косвенноугольныхъ. Задачи . . . . 95—103.
§ 15. Описаніе употребительнѣйшихъ землемѣрныхъ инструментовъ. Приложеніе прямолинейной тригонометріи къ нѣкоторымъ задачамъ практической геометріи. Таблица употребительнѣйшихъ формулъ . . . . 103—112

Въ прибавленіяхъ: Аналитическое изслѣдованіе сомнительныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ. Разложеніе тригонометрическихъ функцій въ ряды. Основныя понятія о съемкѣ плановъ и нивеллировкѣ. Таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ, черезъ каждыя 10′.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ТРИГОНОМЕТРІЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ.

ОТДѢЛЪ 1.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

О тригонометрическихъ величинахъ.

(ГОНІОМЕТРІЯ).

§ 1.

1) Предметъ тригонометріи. *Тригонометрія* имѣетъ главною цѣлію рѣшеніе треугольниковъ; рѣшить треугольникъ значитъ по достаточному числу данныхъ въ треугольникѣ опредѣлить или вычислить остальныя его части. Такъ какъ мы будемъ вычислять треугольники, начерченные на плоскости или на поверхности шара (сферы), то и тригонометрію раздѣляемъ на *плоскую*, или *прямолинейную*, и *сферическую* (*).

2) Неудобства графическихъ пріемовъ при вычисленіи треугольниковъ. Въ элементарной геометріи предложены были первоначальные способы, какъ по даннымъ частямъ прямолинейнаго треугольника графически опредѣлять искомыя его части, съ тѣмъ однакожъ условіемъ, чтобы въ числѣ данныхъ была по крайней мѣрѣ одна сторона, и притомъ, если треугольникъ возможенъ по заданію. Построенныя такимъ образомъ части треугольника вычислялись слѣдующимъ образомъ: на бумагѣ по масштабу или шкалѣ наносили длину данныхъ сторонъ искомаго треугольника, или, соображаясь съ условіями вопроса, на данной сторонѣ, помощію транспортира или хордоваго масштаба, строили углы извѣстной величины, и такимъ образомъ назначали треугольникъ равный или подобный данному. Наконецъ, въ построенномъ треугольникѣ, тѣмъ же масштабомъ опредѣляли длину искомыхъ сторонъ, а по-

(*) Треугольники, начерченные на сфероидѣ, составляютъ предметъ тригонометріи *сфероидальной*. Grunert's Elem. der sphär. und sphäroidischen Trigon. etc.; Cagnoli Trig., sphéroïde aplati etc.

мощію хордоваго масштаба, или транспортира, опредѣляли искомые углы. Но такіе способы опредѣленія неизвѣстныхъ частей и выраженіе искомыхъ помощію чиселъ не могли представить достаточной точности, въ особенности при измѣреніи большихъ разстояній. Погрѣшности въ вычисленіи могли происходить какъ отъ неточности инструментовъ, употребляемыхъ при наложеніи данныхъ и при измѣреніи искомыхъ, такъ и отъ неправильности черченія.

Для опредѣленія же искомыхъ съ требуемою степенью точности необходимо, не графическими способами, но помощію исчисленія, связать искомыя съ данными. Притомъ понятно, что съ измѣненіемъ данныхъ частей треугольника будутъ измѣняться и величины искомыхъ.

Пусть, напримѣръ, даны двѣ стороны a и b треугольника ABC и уголъ C, заключенный между ними (черт. 1), и требуется опредѣлить, въ какой зависимости отъ данныхъ находится третья сторона c. Чтобы чертежемъ показать эту взаимную связь данныхъ съ искомыми, дадимъ каждой изъ извѣстныхъ частей какое-либо приращеніе, и посмотримъ, какія измѣненія произойдутъ черезъ это съ искомою стороною c.

Увеличивъ сторону a какою нибудь величиною α, получимъ, что черезъ это и искомая сторона AB', по свойству чертежа нашего, также увеличится и будетъ равна $c+c'$; то же самое произойдетъ, если увеличимъ сторону b какою либо величиною β, тогда искомая сторона $B'A'$ получитъ еще нѣкоторое измѣненіе, такъ что послѣ увеличенія обѣихъ данныхъ сторонъ искомая сторона $B'A'$ будетъ равна $c+c'+c''$ (*). Наконецъ, если, кромѣ того, и уголъ C увеличится величиною δ, то искомая сторона получитъ снова нѣкоторое приращеніе, и выразится уже линіею $B''A'=c+c'+c''+c'''$.

Такимъ же образомъ помощію элементарной геометріи можно доказать, что и при всякомъ другомъ заданіи, искомыя части, относительно величины и положенія ихъ, находятся въ зависимости отъ данныхъ. Но какъ въ заданіе треугольниковъ могутъ входить стороны и углы, то вся трудность точнаго опредѣленія искомыхъ и состояла въ томъ, чтобы связать помощію вычисленія эти разнородныя величины; поэтому одна изъ главныхъ цѣлей тригонометріи — отстранить эти неудобства и точно выразить, въ какой зависимости отъ данныхъ находятся искомыя части треугольника.

3) Тригонометрическія величины. Чтобы при данныхъ сторонахъ ввести въ вычисленіе углы треугольника, необходимо было выразить ихъ отношеніемъ линіи къ извѣстной линейной величинѣ, принятой за единицу,

---

(*) Понятно, что съ увеличеніемъ одной изъ данныхъ сторонъ искомая сторона можетъ *увеличиваться* или *уменьшаться;* поэтому c', какъ результатъ измѣненія стороны c, можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ.

т. е. числомъ. Такія числа называются *гоніометрическими* (угловыми), или *тригонометрическими величинами.*

Отысканіе взаимной зависимости между линіями и углами, а также общее изслѣдованіе тригонометрическихъ линій и примѣненіе ихъ къ анализу составляетъ предметъ Тригонометріи въ обширномъ ея значеніи; поэтому рѣшеніе треугольниковъ составляетъ только часть элементарной Тригонометріи.

§ 2.

Дѣленіе окружности. Въ элементарной геометріи уже изложено было, что окружность всякаго круга (по шестидесятичному счисленію, (*) div. sexagésimale) раздѣляется на 360 равныхъ частей, называемыхъ градусами, градусъ — на 60′, минута — на 60″; далѣе принято считать десятичными долями секунды.

Такъ какъ уголъ измѣряется соотвѣтствующею ему дугою, то и величину угла измѣряютъ градусами, минутами и секундами; слѣдовательно дуга или уголъ въ 37° 19′ 46″, 27 обозначаютъ 37 градусовъ, 19 минутъ, 46 секундъ и 27 сотыхъ долей секунды. При этомъ понятно, что число °, ′, ″ дуги обозначаетъ не самую величину дуги, а только отношеніе ея къ окружности или къ 360°.

При діаметрѣ, равномъ 1, величина окружности въ геометріи обозначалась знакомъ

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots\ldots,$$

если же примемъ не діаметръ, а радіусъ равнымъ единицѣ, то діаметръ будетъ ровенъ 2, а окружность $= 2\pi$, слѣдовательно π обозначитъ только полуокружность, или 180°; $\frac{1}{2}\pi$ — четверть окружности, или 90°; $\frac{1}{4}\pi = 45°$ и т. д.

Для того, чтобы дугу выразить числомъ въ доляхъ радіуса, составлены особыя таблицы, въ которыхъ по данной величинѣ дуги въ градусахъ можно отыскать длину этой дуги, выраженную въ линейныхъ мѣрахъ радіуса, принятаго за единицу, и обратно. (См. §8, 1, а также прибавл. на концѣ книги, таб. I первый и послѣд. вертикальный столбецъ, и табл. II. Подробнѣе же въ Логар. триг. табл. Веги, изд. Бремикеромъ, 1858 и 1859 г. стр. 288).

Такъ дуга въ 30° выражается числомъ 0,5235988 и, обратно, длинѣ дуги въ 1,0471976 соотвѣтствуетъ 60°.

(*) Дѣленіе дуги или угла на большее или меньшее число равныхъ частей есть дѣло совершенно произвольное; число же 360 избрано преимущественно предъ другими единственно по причинѣ большаго числа его дѣлителей. Французскіе ученые, желая привести вычисленіе дугъ къ десятичному счисленію, предложили дѣлить четверть окружности на 100 градусовъ (grade), градусъ на 100 минутъ, минуту на 100 секундъ. Поэтому, принимая четверть окружности за единицу, получимъ, что дуга въ 23° 47′ 8″ выразится числомъ 0,234708. Для переложенія дугъ стараго дѣленія на новое, должно данное число град., мин. и секундъ, обративъ предварительно въ градусы, умножить на $\frac{10}{9}$; при переложеніи обратномъ, число градусовъ новаго дѣленія помножаютъ, на $\frac{9}{10}$.

Всякая точка A (черт. 2), взятая на движущейся прямой, при непрерывномъ движеніи этой прямой около одной изъ ея точекъ O, принятой за неподвижную, опишетъ дугу AB. Точка A, отъ которой движеніе происходило, называется *началомъ дуги*, а точка B, до которой происходило движеніе, называется *концемъ этой дуги.*

Двѣ дуги, которыхъ алгебрическая сумма составляетъ $90°$, называются *дополнительными* (complément), напр. дуги $AB, + B,D = 90°$ (черт. 2), или если вообще двѣ дуги $a + b = \frac{1}{2}\pi$.

Слѣдов. дуга $32° 21' 3''$, 5 есть дополненіе дуги въ $57° 38' 56''$, 5.

Примѣч. Когда изъ данныхъ дугъ одна болѣе 90°, то дополнѐніе ея будетъ отрицательное, напр. для дуги $AB_{,,}$ отрицательное дополненіе будетъ $B_{,,}D$.

Исполнительными (*) углами или дугами (supplément) называются такія, которыхъ алгебрическая сумма составляетъ $180°$; такъ дуги $AB_{,,} + B_{,,}M = 180°$, или вообще $a + b = \pi$, называются исполнительными.

Слѣдовательно уголъ въ $57°38'56''$, 5 имѣетъ исполненіемъ $122°21'3''$, 5.

Примѣч. Если одна изъ данныхъ дугъ болѣе полуокружности, или 180°, то исполненіе ея будетъ отрицательное.

Два угла, которыхъ сумма равна 360°, называются *обращенными* (reverses).

§ 3.

Чтобы значенію тригонометрическихъ линій придать необходимую общность, и не ограничиваться только углами острыми, должно углу, а потому и дугѣ ему соотвѣтствующей, дать всѣ возможныя значенія до извѣстнаго предѣла, какъ въ одну, такъ и въ другую сторону отъ какой либо неподвижной точки, принимаемой за начало дуги, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, изслѣдовать, какія измѣненія въ положеніи конечной точки дуги будутъ соотвѣтствовать перемѣнной величинѣ данной дуги, или даннаго угла.

Для этого разсмотримъ сперва различныя взаимныя положенія отсѣковъ прямой линіи, начиная отъ одной изъ ея точекъ; далѣе разсмотримъ положеніе плоскостей, относительно раздѣляющей ихъ прямой, и, наконецъ, различные способы обозначенія угловъ и дугъ въ зависимости отъ точекъ и линій, принимаемыхъ за начало движенія.

(*) Ихъ называютъ также дополнительными до двухъ прямыхъ или до 180°.

Геометрическое значенie положительныхъ и отрицательныхъ величинъ.

а) *Обозначенiе отрѣзковъ той же прямой.*

Изъ геометрiи извѣстно, что во всякомъ треугольникѣ ABC, квадратъ стороны a, противолежащiй тупому углу (Черт. 3, № 1), можетъ быть выраженъ формулою

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx;$$

а квадратъ стороны, противъ остраго угла (черт. 3, № 2),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

гдѣ стороны a, b, c обозначены по угламъ противолежащимъ, притомъ въ обоихъ случаяхъ $x = DA$ есть отсѣкъ, идущiй отъ основанiя перпендикуляра до вершины угла, противолежащаго первой сторонѣ.

При опредѣленiи квадрата стороны, лежащей противъ *тупаго* угла (черт. 3, № 1), получимъ

$$\overline{CD^2} = a^2 - BD^2 = b^2 - x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha),$$

откуда $a^2 = b^2 - x^2 + B\overline{D^2}$; но $B\overline{D^2} = c^2 + x^2 + 2cx$,

слѣдоват. $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$, или $a^2 = b^2 + c^2 + 2c\,(+x)\,..\,(1)$,

гдѣ $BD = c + x$, или $x = BD - c$.

При опредѣленiи квадрата стороны, лежащей противъ *остраго* угла (черт. 3, № 2), получимъ

$$\overline{CD^2} = a^2 - \overline{BD^2} = b^2 - x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta),$$

откуда $a^2 = b^2 - x^2 + \overline{BD^2}$; но $\overline{BD^2} = c^2 + x^2 - 2cx$,

слѣдоват. $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, или $a^2 = b^2 + c^2 + 2c\,(-x)\,..\,(2)$,

гдѣ $BD = c - x$, или $x = c - BD$.

Не смотря на тождество начальныхъ уравненiй (α), (β), окончательные результаты (1) и (2) неодинаковы; они отличаются одинъ отъ другаго только знаками при послѣднемъ членѣ, а именно:

Въ *первомъ* изъ этихъ случаевъ отсѣкъ x падаетъ *по лѣвую* сторону основанiя D перпендикуляра CD и выражается *положительною* линiею $(+x)$.

Во *второмъ* случаѣ отсѣкъ этотъ падаетъ *по правую* сторону основанiя D перпендикуляра CD и выражается *отрицательною* линiею $(-x)$.

Въ обоихъ случаяхъ, если бы точка A приближалась къ основанію перпендикуляра, то отсѣкъ AD становился бы менѣе, и когда точка A соединилась бы съ точкою D, то отсѣкъ былъ бы равенъ 0 (нулю), а сторона c слилась бы съ отсѣкомъ BD.

Слѣдовательно измѣненіе знаковъ $+$ на $-$, и $-$ на $+$ въ отсѣкѣ x происходило при прохожденіи величины его черезъ *нуль*, и если положеніе этого отсѣка по одну сторону неподвижной точки D, принимаемой за начало, соотвѣтствовало знаку плюсъ ($+$), то положеніе того же отсѣка по другую сторону начала соотвѣтствовало знаку минусъ ($-$).

Отсюда видно, что общепринятое знакоположеніе $+$ и $-$ для выраженія направленія или положенія линій не есть произвольное, но заключается въ самой сущности математическаго языка и служитъ для обобщенія формулъ.

Пусть даны двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя AB и CD, которыя пересѣкаются въ точкѣ O (черт. 4), и положимъ, что отъ точки O требуется по линіи AB влѣво отложить линію $x = a \quad b$. Для этого сперва отъ точки O влѣво, по линіи AB, отложу прямую $OE = a$; чтобы получить искомое разстояніе $a - b$, стоитъ только изъ прямой a вычесть прямую b, или, что то же, отъ точки E вправо отложить прямую $EF = b$, то разстояніе OF и будетъ искомое.

Но здѣсь могутъ быть три случая:

1) $a > b$, 2) $a = b$ и 3) $a < b$.

1. Если $a > b$, то искомое разстояніе будетъ по лѣвую сторону точки O.
2. Если $a = b$, то искомое разстояніе отъ точки 0 равно нулю.
3. Наконецъ, если $a < b$, то искомое разстояніе будетъ по правую сторону точки O.

Въ первомъ случаѣ выводъ будетъ *положительный*, въ послѣднемъ *отрицательный*, а потому, если условимся отъ точки O откладывать влѣво разстоянія положительныя, то вправо отъ той же точки должно откладывать разстоянія отрицательныя, и обратно.

Отсюда происходитъ общее правило, предложенное *Декартомъ:*

Если на какой нибудь линіи прямой, или кривой, разсматриваются различныя разстоянія отъ какой нибудь постоянной точки, находящейся на этой линіи и принимаемой за общее начало, то разстоянія, находящіяся по одну сторону этой точки, должно брать въ вычисленіяхъ со знакомъ ($+$), а по другую сторону со знакомъ ($-$).

Выборъ стороны для положительныхъ разстояній остается произвольнымъ, съ тѣмъ однакожъ условіемъ, что разстоянія отрицательныя необходимо должны быть отлагаемы на сторонѣ противоположной разстояніямъ положительнымъ. Что же касается до тригонометрическихъ линій, то принято считать положительными всѣ тригонометрическія линіи дугъ, меньшихъ $90°$.

b) Такимъ же образомъ и всякая плоскость, находящеюся на ней прямою, разсѣкается на двѣ части, изъ которыхъ одну часть, по произволу взятую,

принимаютъ за положительную, а другую, противоположную первой, за отрицательную; слѣд. если условимся откладывать отъ точки O, вверхъ по линіи CD, разстоянія положительныя, то отъ точки O, внизъ по линіи CD, должно откладывать разстоянія отрицательныя.

c) Чтобы опредѣлить положеніе какой либо точки M на плоскости, будемъ предполагать данными двѣ неопредѣленныя прямыя (черт. 5) XX' и YY', пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ. Если части ихъ OX, OY примемъ за положительныя, и изъ точки M опустимъ перпендикуляры MP, MQ на прямыя XX', YY', называемыя осями, то для обозначенія положенія точки M достаточно опредѣлить величину и положеніе прямыхъ OP, OQ, т. е. отсѣковъ, произведенныхъ перпендикулярами на осяхъ. Черезъ это опредѣлятся точки P, Q; слѣдоват., проведя $PM \perp OX$ и $QM \perp OY$, получимъ требуемую точку M. Отсюда видно, что точка M, лежащая въ углѣ XOY, составленномъ осями положительными, обозначится слѣдующими данными: $X = OP$, $Y = OQ$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что точка M', находящаяся въ углѣ YOX', будетъ зависѣть отъ положительной части оси Y и отрицательной части оси X, слѣдоват. для точки M'

$$X = -OP', \ Y = +OQ.$$

А потому для точки M''

$$X = -OP', \ Y = -OQ',$$

и наконецъ, для точки M'''

$$X = +OP, \ Y = -OQ'.$$

При различныхъ измѣненіяхъ величины угла мы будемъ одну изъ его сторовъ принимать за неподвижную, а другую за движущуюся около неподвижной вершины; слѣдоват. для опредѣленія положенія второй прямой, кромѣ неподвижной вершины, достаточно, по способу нами предложенному, обозначить положеніе какой либо второй изъ точекъ той же прямой. Такимъ же образомъ для опредѣленія величины дуги и ея положенія необходимо, кромѣ начала дуги обозначать то направленіе, по которому движеніе точки происходило, и если дугу AB примемъ за положитольную (черт. 6), то дуга $AB_{,,}$ будетъ отрицательною (*).

(*) Болѣе подробныя изслѣдованія по этому предмету можно найти: въ Géométrie de position, par Carnot; Traité de Géométrie, supérieure, par Chasles. Des quantités positives et négatives en Géométrie, par le C-te de Pourtalès.

§ 4.

Тригонометрическія линіи.

Разсмотримъ сперва главнѣйшія тригонометрическія линіи дугъ первой четверти и потомъ изслѣдуемъ значеніе ихъ для дугъ, находящихся въ каждой изъ слѣдующихъ четвертей.

Построеніе чертежа. Пусть $ADFD_{\prime}$ есть окружность, описанная произвольнымъ радіусомъ OA (черт. 6), и на ней дуга AB, измѣряющая $\angle AOB$. Черезъ точку A, начало дуги AB, проведемъ діаметръ AOF и другой діам. $DOD_{\prime}$, перпендикулярный къ первому, то окружность раздѣлится на 4 четверти, изъ которыхъ AD составляетъ первую четверть. Изъ конца B дуги AB проведемъ $BC \perp AO$ и $BG \perp DO$, а черезъ точки A и D, перпендикулярно къ прямымъ OA и OD, проведемъ прямыя $EE_{\prime}$ и $HH_{\prime}$, которыя будутъ касательными къ данной окружности. Продолживъ BG и BC до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$, проведемъ $B_{\prime}$ $B_{\prime\prime}$ и $B_{\prime\prime\prime}$ $B_{\prime\prime}$ соотвѣтственно параллельно къ прямымъ $BB_{\prime\prime\prime}$ и $BB_{\prime}$, и точки пересѣченія B, $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$ соединимъ съ центромъ, а прямую $B_{\prime\prime\prime}OB_{\prime}$ продолжимъ до точекъ $E_{\prime}$, $H_{\prime}$.

Наконецъ черезъ точки B, $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$, проведя прямыя перпендикулярныя къ радіусамъ OB, $OB_{\prime}$ и т. д., продолжаемъ ихъ до пересѣченія въ точкахъ J, K, $J_{\prime}$, $H_{\prime}$, съ продолженными радіусами OA, OD и т. д. Въ чертежѣ, нами построенномъ, главнѣйшія тригонометрическія линіи будутъ слѣдующія:

1. a) **Синусъ** (sinus) *дуги есть перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на радіусъ, или діаметръ, проходящій черезъ начало той же дуги.*

Такъ въ первой четверти (черт. 6), BC есть синусъ дуги AB при радіусѣ r, что обыкновенно выражаютъ такъ: $BC = \operatorname{Sin} a$.

Изъ опредѣленія, нами предложеннаго, видно, что синусъ дуги есть половина хорды двойной дуги (semi inscripta; s. ins, отсюда и названіе sinus).

b) **Тангенсъ** (tangente) *дуги есть часть касательной, проходящей черезъ начало дуги, и содержимой между началомъ дуги и продолженнымъ радіусомъ, проходящимъ черезъ конецъ той же дуги.*

Такъ AE есть тангенсъ дуги AB, или $AE = \operatorname{Tang} a$; для краткости пишутъ иногда и такимъ образомъ: $AE = \operatorname{Tg.} a$.

Геометрическое построеніе тангенса дуги понятно изъ опредѣленія; отсюда также видно различіе между касательною и тангенсомъ.

c) **Секансъ** (sécante) *дуги есть продолженный радіусъ, проходящій черезъ начало дуги, до встрѣчи съ касательною, проведенною черезъ конецъ той же дуги.*

Слѣдовательно OJ есть секансъ дуги AB, или $OJ = \text{Sec } a$. Поэтому секансъ дуги есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго одна сторона есть радіусъ, а другая тангенсъ той же дуги, проведенный черезъ конецъ ея. Изъ равенства треугольниковъ OBJ и OAE не трудно доказать, что $OJ = OE$, потому секансъ можетъ быть обозначаемъ каждою изъ этихъ линій.

Различіе между сѣкущею и секансомъ очевидно изъ геометрическаго построенія эихъ линій.

d) **Обращенный синусъ** (sinus versus). *Синусъ верзусъ дуги есть часть радіуса, или діаметра, проходящаго черезъ начало дуги, содержимая между началомъ той же дуги и основаніемъ синуса, проходящаго черезъ конецъ ея.* Поэтому $AC = \text{Sin. vers } a$.

Такъ какъ по величинѣ данной дуги можно опредѣлить величину ея дополненія (§ **2**.), то и обратно, тригонометрическія линіи дополнитольной дуги могутъ служить для опредѣленія величины данной дуги.

Чтобы выразить отношеніе тригонометрическихъ линій дополнитольныхъ дугъ къ даннымъ, мы будемъ первыя изъ нихъ обозначать сокращенною частицею *co* (complement), прибавляемою къ названію тригонометрической линіи данной дуги; поэтому синусъ, тангенсъ, секансъ и синусъ-верзусъ дополнительной дуги, относительно къ данной, называются *косинусомъ* (cosinus), *котангенсомъ* (cotangente), *косекансомъ* (cosecante), и *косинусъ-верзусомъ* (cosinus versus).

Если уголъ AOB примемъ за данный, то уголъ BOD будетъ его дополненіе, а потому и дуга $BD = b$ будетъ дополненіемъ дуги $AB = a$. Слѣдовательно:

e) **Косинусъ** *дуги есть синусъ дополненія той же дуги.*

Напр. $BG = \text{Sin } b = \text{Sin } (90° - a) = \text{Cos } a$.

Изъ прямоугольника $BGOC$ видно, что $BG = CO$, поэтому косинусъ дуги равенъ части радіуса, проходящаго чрезъ начало этой дуги и заключенной между центромъ и основаніемъ синуса, проведеннымъ черезъ конецъ той же дуги.

f) **Котангенсъ** *есть тангенсъ дополненія той же дуги.*

Поэтому начало котангенсовъ отстоитъ на 90° отъ начала данной дуги.

Напр. $DH = \text{Tang } b = \text{Tang } (90° - a) = \text{Cotg } a$.

g) **Косекансъ** *дуги есть секансъ дополненія той же дуги.*

Напр. $OK = \text{Sec } b = \text{Sec } (90° - a) = \text{Cosec } a$.

Такъ какъ $OK = OH$, то косеканс можетъ быть обозначенъ каждою изъ этихъ линій.

h) Косинусъ-верзусъ *есть синусъ верзусъ дополненія той же дуги.*

Напр. DG = Sin vers b = Cos vers a.

Отсюда BC = Sin a = Cosin b,
AE = Tang a = Cotg b,
OJ = Sec a = Cosec b,
AC = Sin vers a = Cos vers b, и вообще:

Sin $(90° - a)$ = Cos a, и обратно, Cos $(90° - a)$ = Sin a,
Tang $(90° - a)$ = Cotg a, Cotg $(90° - a)$ = Tang a,
Sec $(90° - a)$ = Cosec a, Cosec $(90° - a)$ = Sec a.

Поэтому въ томъ же кругѣ

Cos 20° = Sin 70°, Cotg 50° = Tang 40°, Cosec 10° = Sec 80° и т. д.

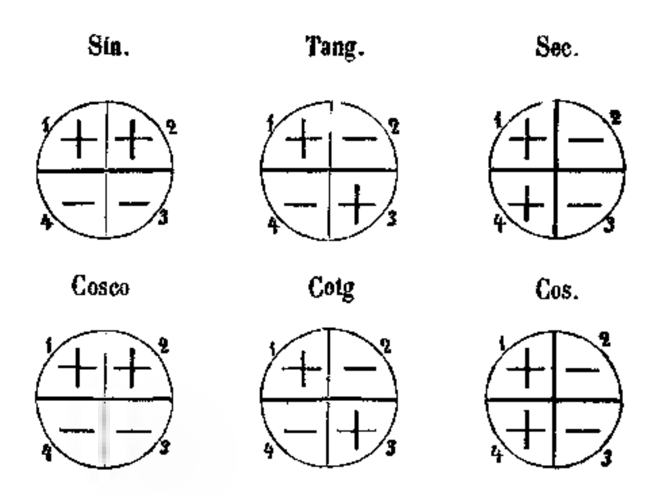
Если точку A примемъ за начало дуги (черт. 6) и будемъ считать *положительными*, т. е. со знакомъ +, всѣ тригонометрическія линіи, соотвѣтствующія положительной дугѣ, меньшей 90°, то, согласуясь съ предложенными нами условіями (§ **3**, стр. 7), касательно обозначенія взаимнаго положенія точекъ, прямыхъ линій, дугъ и угловъ, получимъ, что всѣ *синусы* и *тангенсы*, находящіеся въ верхней части полукруга, относительно діаметра AF, идущаго черезъ начало дуги, будутъ положительные; *отрицательными* же, т. е. со знакомъ минусъ (—), будемъ принимать тѣ изъ нихъ, которые находятся на противоположной сторонѣ того же діаметра.

Косинусы и *котангенсы* будутъ имѣть знакъ +, или —, смотря по тому, въ какомъ положеніи будутъ они находиться относительно діаметра DOD_1, т. е. по лѣвую или по правую его сторону.

Наконецъ, *секансы* и *косекансы* будемъ принимать положительными или отрицательными, смотря по тому, совпадаютъ ли они съ продолженіемъ положительныхъ или отрицательныхъ косинусовъ и синусовъ.

Для нагляднаго изображенія знакоположенія главнѣйшихъ тригонометрическихъ линій въ каждой четверти круга, предлагаемъ на стр. 11 всѣ различныя ихъ положенія.

Синусъ-верзусъ и *косинусъ-верзусъ* остаются всегда положительными, потому что не принимаютъ направленія противоположнаго первоначальному.



2) Если радіусъ круга примемъ за величину постоянную, и длину каждой изъ тригонометрическихъ линій выразимъ въ доляхъ этого радіуса, или, что то же самое, найдемъ отношеніе между тригонометрическою линіею дуги и радіусомъ той же дуги, то получимъ *отвлеченное число*, которое называется *тригонометрическою линіею угла* (*).

Чтобы показать, что *численное значеніе той же тригонометрической линіи даннаго угла всегда остается величиною постоянною*, докажемъ сперва, что *отношеніе между тригонометрическими линіями того же угла не зависитъ отъ длины радіуса.*

Пусть данъ произвольной величины уголъ A (черт. 7); вершину A принявъ за центръ, радіусами различной величины $AB = r$, $AC = r_{,}$, $AD = r_{,,}$ опишемъ данному углу соотвѣтствующія дуги $BE = a$, $CF = a_{,}$, $DH = a_{,,}$ и т. д., и проведемъ синусы BG, CI, DK, и тангенсы EL, FM, HN; то по подобію треугольниковъ ABG, ACI, ADK, а также треугольниковъ AEL, AFM, AHN, получимъ $BG : CI : DK = AB : AC : AD$

или $$\text{Sin}\, a : \text{Sin}\, a_{,} : \text{Sin}\, a_{,,} = r : r_{,} : r_{,,} \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

такимъ же образомъ можно вывести,

что $$\text{Tang}\, a : \text{Tang}\, a_{,} : \text{Tang}\, a_{,,} = r : r_{,} : r_{,,} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Подобные же результаты получатся и для прочихъ тригонометрическихъ линій.

(*) Точнѣе было бы назвать это число *тригонометрическою величиною угла.*

Отсюда видимъ, что въ окружностяхъ, описанныхъ разными радіусами, величины тригонометрическихъ линій дугъ, соотвѣтствующихъ одному и тому же углу, пропорціональны радіусамъ етихъ круговъ.

Переставивъ члены пропорцій (1) и (2),

получимъ $$\frac{\mathrm{Sin}\, a}{r}=\frac{\mathrm{Sin}\, a_{,}}{r_{,}}=\frac{\mathrm{Sin}\, a_{,,}}{r_{,,}} \quad \ldots \quad (3)$$

и $$\frac{\mathrm{Tang}\, a}{r}=\frac{\mathrm{Tang}\, a_{,}}{r_{,}}=\frac{\mathrm{Tang}\, a_{,,}}{r_{,,}} \quad \ldots \quad (4),$$

т. е., что хотя тригонометрическія линіи и возрастаютъ пропорціонально радіусу, но, *для одного и того же угла, отношеніе всѣхъ тригонометрическихъ линій къ соотвѣтствующему радіусу остается постояннымъ.*

Слѣдовательно, положивъ $r=1$, (изъ форм. 3)

получимъ $$\mathrm{Sin}\, a=\frac{\mathrm{Sin}\, a_{,}}{r_{,}}=\frac{\mathrm{Sin}\, a_{,,}}{r_{,,}} \text{ и т. д.}$$

Такимъ же образомъ (изъ форм. 4) имѣемъ

$$\mathrm{Tang}\, a=\frac{\mathrm{Tang}\, a_{,}}{r_{,}}=\frac{\mathrm{Tang}\, a_{,,}}{r_{,,}},$$

а потому $$\mathrm{Sin}\, a_{,}=\mathrm{Sin}\, a \, .\, r_{,}$$

и $$\mathrm{Tang}\, a_{,}=\mathrm{Tang}\, a \, .\, r_{,}.$$

Отсюда понятно, что 1) для перехода отъ тригонометрическихъ линій дугъ къ такимъ же выраженіямъ для соотвѣтствующихъ имъ угловъ, достаточно положить радіусъ дуги равнымъ единицѣ, или, что то же самое, выразить числомъ отношеніе между тригонометрическою линіею данной дуги и ея радіусомъ. Такія отношенія называются *натуральными* (*) *величинами тригонометрическихъ линій*, или просто *тригонометрическими числами.*

3) Обратно, для перехода отъ тригонометрическихъ чиселъ угловъ въ тригонометрическимъ линіямъ дугъ, необходимо радіусъ данной дуги помножить на соотвѣтствующее тригонометрическое число даннаго угла. Понятно, что правило это есть непосредственное слѣдствіе правила перваго.

Примѣч. Отсюда видно, что вообще для перехода отъ тригонометрическихъ формулъ дугъ къ тригонометрическимъ формуламъ угловъ необходимо во всѣхъ тригонометрическихъ линіяхъ положить радіусъ равнымъ единицѣ; и обратно, для перехода отъ тригонометрическихъ формулъ угловъ къ тригонометрическимъ формуламъ дугъ, необходимо вездѣ вмѣсто тригонометрическаго числа подставить отношеніе между тригонометрическою линіею дуги и ея радіусомъ, и потомъ, гдѣ можно, сдѣлать сокращеніе

(*) Для отличія отъ *логариѳмическихъ* или табличныхъ, т. е. искуственныхъ.

Примѣч. 2. При условіяхъ, нами изложенныхъ, для угла $AOB = a$ (черт. 2)

получимъ $\mathrm{Sin}\, a = \frac{BC}{BO}$ (отношеніе это называется *синусъ* угла a), ... (1)

а потому $BC = \mathrm{Sin}\, a \,.\, BO$ . . . . (2).

Вообще численное отношеніе двухъ линій найдется, если обѣ данныя величины будуть измѣрены одною и тою же мѣрою, и потомъ оба полученныя числа раздѣлены одно на другое.

Такъ наприм. если $BO = 6$ фут., а $BC = 4$ фут., то $\mathrm{Sin}\, a = \frac{4 \text{ ф.}}{6 \text{ ф.}} = \frac{2}{3}$.

Если, на оборотъ, $\mathrm{Sin}\, a = \frac{2}{3}$ и радіусъ даннаго круга = 6 фут., то (по форм. 2)

$BC = \mathrm{Sin}\, a.\, BO$, слѣдоват. получимъ

$$BC = \frac{2}{3} \,.\, 6 \text{ ф.} = 4 \text{ фут.}$$

4) Тригонометрическія линіи угловъ, или тригонометрическія числа. Если вершину перемѣннаго угла β (черт. 8) примемъ за центръ, и произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу DC, то перпендикуляръ CA, опущенный изъ конца C этой дуги на неподвижную сторону угла, отсѣчетъ на ней часть BA; измѣривъ тою же мѣрою всѣ три прямыя, положимъ, что радіусъ $BC = a$, перпендикуляръ $CA = b$ и отсѣкъ $BA = c$. Согласуясь съ изложеннымъ нами знакоположеніемъ линій (§ 3), *мы можемъ разсматривать тригонометрическія линіи угловъ, какъ алгебраическія отношенія перпендикуляра, отсѣка и радіуса* (*).

Поэтому получимъ слѣдующія опредѣленія:

1. *Синусъ угла есть число, показывающее отношеніе перпендикуляра къ радіусу,*

$$\text{или } \mathrm{Sin}\, \beta = \frac{b}{a}.$$

2. *Косинусъ угла есть отношеніе отсѣка къ радіусу,*

$$\mathrm{Cos}\, \beta = \frac{c}{a}.$$

3. *Тангенсъ угла есть отношеніе перпендикуляра къ отсѣку.*

$$\mathrm{Tang}\, \beta = \frac{b}{c}, \quad \text{поэтому} \quad \mathrm{Tang}\, \beta = \frac{b : a}{c : a} = \frac{\mathrm{Sin}\, \beta}{\mathrm{Cos}\, \beta}.$$

(*) Если двѣ перемѣнныя величины таковы, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе другой, то такія величины называются *функціями* одна другой; напр. окружность и площадь круга суть функціи радіуса, и на оборотъ, сторона треугольника есть функція двухъ другихъ сторонъ его и угла, содержимаго между ними; хорда есть функція дуги ей соотвѣтствующей и т. д. Поэтому тригонометрическія линіи угловъ или дугъ называются также *тригонометрическими функціями.*

4. *Котангенсъ угла есть отношенiе отсѣка къ перпендикуляру, слѣдовательно есть выраженiе обратное тангенсу.*

$$\text{Cotg}\,\beta = \frac{c}{b}, \text{ или } \text{Cotg}\,\beta = \frac{c\ \ c}{b : c} = \frac{1}{\text{Tang}\,\beta}, \qquad \text{Cotg}\,\beta = \frac{\text{Cos}\,\beta}{\text{Sin}\,\beta}.$$

5. *Секансъ угла есть отношенiе радiуса къ отсѣку, а потому секансъ есть выраженiе обратное косинусу.*

$$\text{Sec}\,\beta = \frac{a}{c}, \text{ или } \text{Sec}\,\beta = \frac{a : a}{c : a} = \frac{1}{\text{Cos}\,\beta}.$$

6. *Косекансъ угла есть отношенiе радiуса къ перпендикуляру, а потому есть выраженiе обратное синусу.*

$$\text{Cosec}\,\beta = \frac{a}{b}, \text{ или } \text{Cosec}\,\beta = \frac{a : a}{b : a} = \frac{1}{\text{Sin}\,\beta}.$$

Примѣч. Отношенiя Sin., Cosin., Tang. называются прямыми (directs), а Cotg., Sec и Cosec. — обратными; притомъ отношенiя Sin. и Cos. принимаемъ главными, остальныя же чаще выражаются помощiю этихъ чиселъ.

5) Сущность тригонометрическихъ вычисленiй. Возможность вычисленiя даннаго треугольника посредствомъ извѣстныхъ отношенiй между его сторонами, при извѣстныхъ углахъ, основана на слѣдующемъ соображенiи. Если бы можно было какимъ нибудь способомъ, помощiю формулъ, или графически, вычислить рядъ треугольниковъ, которыхъ углы постепенно переходили бы всѣ возможныя величины, черезъ каждую секунду, или черезъ каждую минуту, то этотъ рядъ необходимо заключалъ бы въ себѣ треугольникъ, подобный тому, который данъ для вычисленiя, какiе бы ни были углы и стороны послѣдняго. Отсюда видно, что помощiю простыхъ отношенiй и пропорцiй искомыя величины даннаго треугольника могли бы быть опредѣлены посредствомъ частей треугольниковъ предварительно вычисленныхъ И дѣйствительно, пусть въ треугольникѣ ABC извѣстны углы B, C и сторона BC: въ ряду вычисленныхъ треугольниковъ отыщемъ такой, abc, котораго два угла b и c были бы соотвѣтственно равны угламъ B и C.

Тогда $\triangle\ ABC$ будетъ подобенъ $\triangle\ abc$, а потому составятся слѣдующiя пропорцiи:

$$BC : bc = AB : ab \text{ (черт. 9)}$$

и

$$BC : bc = AC : ac, \text{ откуда}$$

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc} \text{ и } AC = \frac{BC \times ac}{bc};$$

но какъ кромѣ того $\angle A = \angle a$, то понятно, что всѣ части предложеннаго треугольника будутъ извѣстны.

Чтобы еще точнѣе представить себѣ возможность вычисленія треугольниковъ по способу нами предложенному, возьмемъ простѣйшій случай, и покажемъ, какой пріемъ можно употребить для вычисленія прямоугольныхъ треугольниковъ.

Предположивъ, что четвѣрть окружности (при $r = 1$) раздѣлена на 90°, каждый градусъ на 60 минутъ, каждая минута на 60 сек., если изъ всѣхъ точекъ дѣленія B, B' и т. д. на радіусъ OA опущены будутъ перпендикуляры BC, $B'C'$. . . . и проч. (черт. 10), и всѣ точки дѣленія окружности соединены съ центромъ, то получится рядъ треугольниковъ, BCO, $B'C'O$. . . . прямоугольныхъ при точкахъ C, C'. . . ., которыхъ углы BOC, $B'OC'$. . . послѣдовательно проходятъ черезъ всѣ возможныя величины, и потому въ ряду нами вычисленномъ, для всякаго предложеннаго треугольника, найдется такой, который будетъ подобенъ данному. Всѣ же предварительно вычисленные нами треугольники, находящіеся въ томъ же кругѣ, будутъ имѣть равными гипотенузу, принятую за единицу, и прямой уголъ.

Такимъ же образомъ можно было бы составить другой рядъ прямоугольныхъ треугольниковъ, по прямому углу и по катету, принятому за единицу.

Для этого изъ точки A возставивъ къ радіусу OA перпендикуляръ At и продоливъ радіусы OB, OB' . . . . и т. д. до пересѣченія съ касательною въ точкахъ T, T' . . , получимъ рядъ треугольниковъ OAT, OAT'. . ., въ которыхъ острый уголъ при точкѣ O будетъ имѣть всѣ возможныя величины, такъ что въ числѣ этихъ треугольниковъ необходимо найдется такой, который будетъ подобенъ данному. По заданнымъ частямъ отыскавъ треугольникъ подобный предложенному, можемъ вычислить остальныя части по пропорціи. Если бы точки дѣленія на четверти окружности были взяты черезъ каждую секунду, то внутри четверти круга составилось бы 324000 прямоугольныхъ треугольниковъ, и столько же внѣ ея, которые, для удобства ихъ отысканія, располагаются обыкновенно въ таблицахъ; эти то предварительно вычисленные ряды и называются *таблицами натуральныхъ величинъ тригонометрическихъ линій.*

Что же касается до косвенноугольныхъ треугольниковъ, то вычисленіе ихъ можетъ быть произведено помощію прямоугольныхъ, на которые разсѣчется данный треугольникъ, если изъ вершины одного изъ угловъ на противолежащую сторону опустимъ перпендикуляръ.

Если представимъ себѣ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ, принимая вершины острыхъ угловъ за центры, каждою изъ сторонъ прямоугольнаго треугольника описаны дуги, то выведенныя нами шесть главныхъ тригонометрическихъ линій будутъ всѣ находиться въ данномъ прямоугольномъ треугольникѣ.

Принявъ точку B за центръ (черт. 8), а $BC = a$ за радіусъ и описавъ дугу, получимъ, что $b = \mathrm{Sin}\, B$, $c = \mathrm{Cos}\, B$; если же дуга описана точкою B какъ центромъ,

а радіусомъ $AB = c$, то $b = \text{Tang } B$, $a = \text{Sec } B$; наконецъ, если точку C примемъ за центръ, и радіусами a и b опишемъ дуги, то получимъ: $c = \text{Sin } C = \text{Cos } B$ (при рад. a), $b = \text{Cos } C = \text{Sin } B$ (при рад. a), $c = \text{Tang } C = \text{Cotg } B$ (при рад. b), $a = \text{Sec } C = \text{Cosec } B$ (при рад. b).

Отсюда видно, что для вычисленія частей прямоугольныхъ треугольниковъ необходимы только шесть тригонометрическихъ линій; остальныя же двѣ, т. е. Sin vers и Cos vers, какъ при вычисленіи треугольниковъ, такъ и вообще при тригонометрическихъ вычисленіяхъ, употребляются весьма рѣдко, и только иногда вводятся для упрощенія формулъ.

Примѣч. Способъ, употребленный нами для вывода тригонометрическихъ линій въ кругѣ (§ 4; 1), имѣетъ то преимущество, что наглядно выражаетъ отношеніе всѣхъ тригонометрическихъ линій *къ одному и тому же радіусу*.

§ 5.

Изслѣдованіе соотносительныхъ величинъ тригонометрическихъ линій.

Мы уже сказали, что тригонометрія, въ обширномъ своемъ значеніи, не ограничивается рѣшеніемъ треугольниковъ. При общемъ изслѣдованіи различныхъ вопросовъ, относящихся къ гоніометріи, бываетъ иногда необходимо разсматривать не только дуги бо̀льшія четверти окружности или полуокружности, но и такія, величины которыхъ, переходя за окружность, предполагаются увеличивающимися отъ $0°$ до нѣсколькихъ окружностей и до ∞ положительной или отрицательной. Тригонометрическія же линіи дугъ отъ $90°$ до $360°$ встрѣчаются весьма часто.

Поэтому разсмотримъ, какъ измѣняются тригонометрическія линіи при постепенномъ уменьшеніи и увеличеніи дугъ.

Принявъ точку A за начало дуги AB (черт. 6), при радіусѣ $= 1$, предположимъ сперва, что дуга AB *уменьшается*, то понятно, что синусъ ея, тангенсъ и секансъ будутъ также уменьшаться, и если точка B сольется съ точкою A, т. е. если дуга AB уменьшится до *нуля*, то и $\text{Sin } 0 = 0$, $\text{Tang } 0 = 0$, $\text{Sec } 0 = 1$. Съ уменьшеніемъ дуги и съ приближеніемъ ея къ нулю, косинусъ, котангенсъ и косекансъ увеличиваются, и если дуга уменьшится до нуля, то косинусъ сольется съ радіусомъ и будетъ равенъ 1, котангенсъ и косекансъ дойдутъ до безконечности.

1) Предположимъ теперь непрерывное увеличеніе дуги AB и разсмотримъ, какія измѣненія въ тригонометрическихъ линіяхъ произойдутъ въ каждой четверти круга.

a) **Если дуга увеличивается отъ 0° до 90°, или отъ 0 до $\frac{1}{2}\pi$**, то понятно, что съ увеличенiемъ дуги AB и *синусъ* BC этой дуги увеличивается отъ нуля до радiуса.

Тангенсъ AE также увеличивается отъ нуля до безконечности.

Секансъ OJ увеличивается отъ радiуса до безконечности.

Три линiи дополнительной дуги уменьшаются: *косинусъ* CO отъ радiуса до нуля, *котангенсъ* DH отъ безконечности до нуля и *косекансъ* OK отъ безконечности до радiуса.

При радiусѣ равномъ 1, получимъ:

$$\begin{array}{lll} \text{Sin } 0° = 0, & \text{Tang } 0° = 0 & \text{Sec } 0° = 1, \\ \text{Cos } 0° = 1, & \text{Cotg } 0° = \infty, & \text{Cosec } 0° = \infty, \\ \text{Sin } 90° = 1, & \text{Tang } 90° = \infty, & \text{Sec } 90° = \infty, \\ \text{Cos } 90° = 0, & \text{Cotg } 90° = 0, & \text{Cosec } 90° = 1. \end{array}$$

b) Если **дуга продолжаетъ увеличиваться отъ 90° до 180°, или отъ $\frac{1}{2}\pi$ до π**, то *синусъ* ея $B_{,}C_{,}$, оставаясь положительнымъ, уменьшается отъ 1 до 0.

Косинусъ $OC_{,}$, при переходѣ дуги черезъ точку D, принимаетъ положенiе противоположное первоначальному, слѣдовательно становится отрицательнымъ, и независимая отъ знака, или *абсолютная* (*) величина его возрастаетъ до 1; слѣдовательно во второй четверти косинусъ измѣняется между 0 и — 1.

Тангенсъ $AE_{,}$ принимаетъ положенiе отрицательное; абсолютная величина его уменьшается отъ безконечности до 0.

Секансъ $OJ_{,}$ есть отрицательный, потому что идетъ по отрицательному направленiю радiуса (§ 3, 1); абсолютная величина секанса въ этой четверти уменьшается отъ ∞ до радiуса.

Котангенсъ $DH_{,}$ есть отрицательный и измѣняется отъ 0 до ∞.

Косекансъ OK есть положительный и увеличивается отъ 1 до ∞.

Поэтому, когда дуга дойдетъ до 180°, то для всѣхъ тригонометрическихъ линiй получимъ:

$$\begin{array}{lll} \text{Sin } 180° = \quad 0, & \text{Tang } 180° = 0, & \text{Sec } 180° = -1, \\ \text{Cos } 180° = -1, & \text{Cotg } 180° = \infty, & \text{Cosec } 180° = \quad \infty, \end{array}$$

c) **Дуга увеличивается отъ 180° до 270°, или отъ π до $\frac{3\pi}{2}$.**

Синусъ $B_{,,}C_{,}$ принимаетъ положенiе отрицательное; абсолютная величина его возрастаетъ между пределами 0 и 1.

(*) *Абсолютною величиною* будемъ называть такую, которая разсматривается независимо отъ положенiя или отъ знака.

Косинусъ остается отрицательнымъ, величина его, независимо отъ знака, уменьшается отъ 1 до 0.

Тангенсъ AE положительный, увеличивается отъ 0 до ∞.

Секансъ OJ, остается отрицательнымъ; абсолютная величина его возрастаетъ отъ 1 до ∞.

Котангенсъ DH есть положительный, уменьшаотся отъ ∞ до 0.

Косекансъ OK, есть отрицательный, независимо отъ знака уменьшается отъ ∞ до 1. Слѣдовательно

$\text{Sin } 270° = -1$, $\text{Tang } 270° = \infty$, $\text{Sec } 270° = \infty$,
$\text{Cos } 270° = 0$, $\text{Cotg } 270° = 0$, $\text{Cosec } 270° = -1$.

d) **Дуга увеличивается отъ 270° до 360°, или отъ $\frac{3\pi}{2}$ до 2π.**

Синусъ, оставаясь отрицательнымъ, измѣняется отъ -1 до 0.

Косинусъ положительный, увеличивается отъ 0 до 1.

Тангенсъ отрицательный, абсолютная величина его измѣняется отъ ∞ до 0.

Секансъ OJ переходитъ въ положительный и уменьшается отъ ∞ до 1.

Котангенсъ отрицательный, измѣняется отъ 0 до ∞.

Косекансъ отрицательный, абсолютная величина его увеличивается отъ 1 до ∞.

Слѣдовательно:

$\text{Sin } 360° = 0$, $\text{Tang } 360° = 0$, $\text{Sec } 360° = 1$,
$\text{Cos } 360° = 1$, $\text{Cotg } 360° = \infty$, $\text{Cosec } 360° = \infty$.

2) Тригонометрическія линіи дугъ, превышающихъ окружность. Если дуга продолжаетъ увеличиваться, и становится болѣе окружности, то тригонометрическія линія будутъ имѣть тѣже величины, съ тѣми же знаками, какъ и тригонометрическія линіи дуги, прибавляемой къ окружности. При увеличеніи этой дуги, прибавленной къ окружности, происходитъ такой же послѣдовательный рядъ величинъ тригонометрическихъ линій съ соотвѣтствующими имъ знаками, какъ и въ дугахъ увеличивающихся отъ 0; то же самое замѣчаемъ, если дуга, перейдя черезъ двѣ или нѣсколько окружностей, все еще продолжаетъ увеличиваться. Свойство тригонометрическихъ линій, по которому онѣ возвращаются съ прежними величинами и знаками, называется ихъ *періодичностью* (§ 5, 4).

Примѣч. Всякая дуга, большая одной или нѣсколькихъ окружностей, можетъ быть выражена формулою $2n\pi + a$, или $n.\ 360° + a$, (гдѣ n есть цѣлое число); а потому всѣ тригонометрическія линіи этой дуги имѣютъ величину и знакъ тригонометрической линіи дуги a.

Слѣдоват. $\sin(2n\pi + a) = \sin a$, $\operatorname{Cotg}(2n\pi + a) = \operatorname{Cotg} a$,
$\cos(2n\pi + a) = \cos a$, $\operatorname{Sec}(2n\pi + a) = \operatorname{Sec} a$,
$\operatorname{Tang}(2n\pi + a) = \operatorname{Tang} a$, $\operatorname{Cosec}(2n\pi + a) = \operatorname{Cosec} a$.

3) Тригонометрическія линіи дугъ отрицательныхъ. Что касается до отрицательныхъ дугъ, которыя должны быть считаемы обратно дугамъ положительнымъ, т. е. по направленію $AB_{,,,}A_{,}$ (черт. 6), то, независимо отъ знака, величина тригонометрической линіи этой дуги равна величинѣ той же тригонометрической линіи дуги положительной, имѣющей съ данною одинаковое число градусовъ. Взявъ напримѣръ $\smile An_{,}B_{,,,} = \smile AnB$, изъ равенства треугольниковъ BCO и $B_{,,,}CO$, AEO и $AE_{,}O$, DHO и $DH_{,}O$ получимъ $BC = B_{,,,}C$, $AE = AE_{,}$, $OE = OE_{,}$, $DH = DH_{,}$, $OH = OH_{,}$, т. е. что данныя дѣ дуги, равныя по величинѣ, изъ которыхъ одна положительная, а другая отрицательная, необходимо будутъ имѣть тѣ же абсолютныя величины тригонометрическихъ линій, но нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть съ противными знаками.

Такъ синусы, тангенсы, котангенсы и косекансы $(OK, OK_{,})$ дугъ $AB_{,,,}$ и AB имѣютъ противные знаки; косинусы и секансы (OJ, OJ) имѣютъ знаки тѣже. Обозначивъ дугу $AB_{,,,}$ черезъ $(-a)$, получимъ:

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin a, & \cos(-a) &= \cos a, \\ \operatorname{Tang}(-a) &= -\operatorname{Tang} a, & \operatorname{Sec}(-a) &= \operatorname{Sec} a, \\ \operatorname{Cotg}(-a) &= -\operatorname{Cotg} a, & \operatorname{Cosec}(-a) &= -\operatorname{Cosec} a. \end{aligned}$$

4) Тригонометрическія линіи дугъ исполнительныхъ. Чтобы найти взаимную связь между тригонометрическими линіями *дугъ исполнительныхъ* (§ **2**), необходимо считать ихъ отъ общаго начала A (черт. 6).

a) Какъ изъ геометрическаго построенія этихъ линій, такъ и изъ равенства треугольниковъ видно, что для исполнительныхъ дугъ AnB и $AnB_{,}$ синусы BC и $B_{,}C_{,}$ равны и съ тѣми же знаками, косинусы BG и $B_{,}G$, или CO и $C_{,}O$, равны и съ противными знаками, также тангенсы AE и $AE_{,}$, котангенсы DH и $DH_{,}$, секансы OJ и $OJ_{,}$ или OE и $OE_{,}$ равны и съ противными знаками; косекансы OK, или OH и $OH_{,}$, равны и съ тѣми же знаками.

Обозначивъ дугу AB черезъ a, получимъ:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - a) &= \sin a, & \cos(180^\circ - a) &= -\cos a, \\ \operatorname{Tang}(180^\circ - a) &= -\operatorname{Tang} a, & \operatorname{Cotg}(180^\circ - a) &= -\operatorname{Cotg} a, \\ \operatorname{Sec}(180^\circ - a) &= -\operatorname{Sec} a, & \operatorname{Cosec}(180^\circ - a) &= \operatorname{Cosec} a. \end{aligned}$$

b) Если черезъ $90^\circ - a$ обозначимъ одну изъ исполнительныхъ дугъ, меньшую 90°, то другая дуга, исполнительная данной, будетъ $90^\circ + a$; но

(по предъидущ. 4. a, § 5) всѣ тригонометрическія линіи исполнительныхъ дугъ равны между собою, и съ противными знаками, исключая синуса и косеканса, которые равны и съ тѣми же знаками, слѣдоват. получимъ:

$$
\begin{aligned}
\text{Sin}\ (90^\circ + \alpha) &= \ \ \text{Sin}\ (90^\circ - \alpha) = \ \ \text{Cos}\ \alpha,\\
\text{Cos}\ (90^\circ + \alpha) &= -\text{Cos}\ (90^\circ - \alpha) = -\text{Sin}\ \alpha,\\
\text{Tang}\ (90^\circ + \alpha) &= -\text{Tang}\ (90^\circ - \alpha) = -\text{Cotg}\ \alpha,\\
\text{Cotg}\ (90^\circ + \alpha) &= -\text{Cotg}\ (90^\circ - \alpha) = -\text{Tang}\ \alpha,\\
\text{Sec}\ (90^\circ + \alpha) &= -\text{Sec}\ (90^\circ - \alpha) = -\text{Cosec}\ \alpha,\\
\text{Cosec}\ (90^\circ + \alpha) &= \ \ \text{Cosec}\ (90^\circ - \alpha) = \ \ \text{Sec}\ \alpha,
\end{aligned}
$$

c) Взявъ положительную дугу $ABB_{,,} > 180^\circ$ и $< 360^\circ$ получимъ, что синусъ ея $B_{,,}C_{,}$ есть отрицательный, потому что направленіе его противоположно синусу дуги AB первой четверти; косинусъ данной дуги есть $OC_{,}$, равный OC, но съ противнымъ знакомъ; AE ея тангенсъ и DH котангенсъ. Послѣднія двѣ тригонометрическія линія равны тѣмъ же тригонометрическимъ линіямъ исполнительныхъ дугъ первой четверти, и съ тѣми же знаками. Поэтому:

$$
\begin{aligned}
\text{Sin}\ (180^\circ + \alpha) &= -\text{Sin}\ \alpha, & \text{Tang}\ (180^\circ + \alpha) &= \ \ \text{Tang}\ \alpha,\\
\text{Cos}\ (180^\circ + \alpha) &= -\text{Cos}\ \alpha, & \text{Cotg}\ (180^\circ + \alpha) &= \ \ \text{Cotg}\ \alpha,\\
\text{Sec}\ (180^\circ + \alpha) &= -\text{Sec}\ \alpha, & \text{Cosec}\ (180^\circ + \alpha) &= -\text{Cosec}\ \alpha,
\end{aligned}
$$

Примѣч. Изъ формулъ, нами выведенныхъ, видно, что Tang и Cotg не измѣняются, когда дуга увеличивается на 180°, или полуокружностію π; такое возвращеніе прежней величины тригонометрической линіи называется ея *періодичностію* (§ 5, 1). Въ этомъ случаѣ величина π называется *амплитудою періода*, или просто *періодомъ*. Для остальныхъ четырехъ тригонометрическихъ линій періодичность начинается послѣ 360°, или 2π.

5) Взаимная связь между тригонометрическими линіями вообще. Изъ общаго обзора соотносительныхъ величинъ тригонометрическихъ линій находимъ, что при радіусѣ равномъ единицѣ, *синусъ* и *косинусъ* могутъ измѣняться отъ $+1$ до -1; поэтому радіусъ, или 1, какъ наибольшая величина синуса, называется *цѣлымъ синусомъ* (sinus totus). Этими тригонометрическими линіями можетъ быть выражено всякое число, положительное или отрицательное, абсолютная величина котораго менѣе единицы. Знакъ синуса и косинуса мѣняется при переходѣ ихъ черезъ *нуль*.

Тангенсъ и *котангенсъ* измѣняются отъ $+\infty$ до $-\infty$, и потому могутъ обозначать всѣ возможныя вещественныя алгебраическія величины, т. е. числа цѣлыя и дробныя, положительныя и отрицательныя. Знакъ ихъ мѣняется при переходѣ черезъ 0 (нуль) и черезъ ∞.

Наконецъ величина *секанса* и *косеканса* измѣняется между предѣлами отъ 1 до ∞, а также отъ -1 до $-\infty$. Поэтому всякое число, положитель-

ное или отрицательное, не меньшее 1, может быть изображено секансом или косекансом. Знак этих тригонометрических линий изменяется при переходе через безконечность.

Примеч. Помощію изложенных нами правил нетрудно вывести слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\ a &= \text{Sin}\ (\pi - a) = -\text{Sin}\ (\pi + a) = \text{Sin}\ (2\pi - a),\\
\text{Cos}\ a &= -\text{Cos}\ (\pi - a) = -\text{Cos}\ (\pi + a) = \text{Cos}\ (2\pi - a),\\
\text{Tang}\ a &= -\text{Tang}\ (\pi - a) = \text{Tang}\ (\pi + a) = -\text{Tang}\ (2\pi - a),\\
\text{Cotg}\ a &= \text{Cotg}\ (\pi - a) = \text{Cotg}\ (\pi + a) = -\text{Cotg}\ (2\pi - a),\\
\text{Sec}\ a &= -\text{Sec}\ (\pi - a) = -\text{Sec}\ (\pi + a) = \text{Sec}\ (2\pi - a),\\
\text{Cosec}\ a &= \text{Cosec}\ (\pi - a) = -\text{Cosec}\ (\pi + a) = -\text{Cosec}\ (2\pi - a),
\end{aligned}$$

а потому, и обратно, отысканіе величины тригонометрической линіи всякой дуги можно привести к отысканію тригонометрической линіи дуги, находящейся в первой четверти.

Пусть наприм. требуется опредѣлить Sin 1422°; раздѣлив данное число градусов на 360°, отдѣлим от данной дуги столько цѣлых окружностей, сколько их в ней содержится; остаток 342° покажет, что $\text{Sin}\ 1422° = \text{Sin}\ 342°$; отдѣлив еще 180°, получим $\text{Sin}\ 342° = -\text{Sin}\ 162°$; но синусы исполнительных дуг равны между собою и с тѣми же знаками, слѣдоват.

$$-\text{Sin}\ 162° = -\text{Sin}\ 18°, \text{ а потому } \text{Sin}\ 1422° = -\text{Sin}\ 18°.$$

Таким же образом получим, что

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\ 1027° &= \text{Sin}\ (2.360° + 307°) = \text{Sin}\ 307° = \text{Sin}\ (180° + 127°)\\
&= -\text{Sin}\ 127° = -\text{Sin}\ (180 - 127°) = -\text{Sin}\ 53°.
\end{aligned}$$

6) По изслѣдованіям нами предложенным в предыдущих §§, относительно величины и положенія тригонометрических линій, можно составить слѣдующія таблицы:

a)

$$\begin{aligned}
&\text{Sin}\ 0° = 0, && \text{Cos}\ 0° = 1, && \text{Tang}\ 0° = 0,\\
&\text{Sin}\ 90° = 1, && \text{Cos}\ 90° = 0, && \text{Tang}\ 90° = \infty,\\
&\text{Sin}\ 180° = 0, && \text{Cos}\ 180° = -1, && \text{Tang}\ 180° = 0,\\
&\text{Sin}\ 270° = -1; && \text{Cos}\ 270° = 0, && \text{Tang}\ 270° = \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Sec}\ 0° = 1, && \text{Cosec}\ 0° = \infty, && \text{Cotg}\ 0° = \infty,\\
&\text{Sec}\ 90° = \infty, && \text{Cosec}\ 90° = 1, && \text{Cotg}\ 90° = 0,\\
&\text{Sec}\ 180° = -1, && \text{Cosec}\ 180° = \infty, && \text{Cotg}\ 180° = \infty,\\
&\text{Sec}\ 270° = \infty; && \text{Cosec}\ 270° = -1; && \text{Cotg}\ 270° = 0\ (*)
\end{aligned}$$

(*) b)

$$\begin{aligned}
&\text{Sin}\ (90° - a) = \text{Cos}\ a, && \text{Cos}\ (90° - a) = \text{Sin}\ a,\\
&\text{Tang}\ (90° - a) = \text{Cotg}\ a, && \text{Cotg}\ (90° - a) = \text{Tang}\ a,\\
&\text{Sin}\ (90° + a) = \text{Cos}\ a, && \text{Cos}\ (90° + a) = -\text{Sin}\ a,\\
&\text{Tang}\ (90° + a) = -\text{Cotg}\ a, && \text{Cotg}\ (90° + a) = -\text{Tang}\ a,\\
&\text{Sin}\ (180° - a) = \text{Sin}\ a, && \text{Cos}\ (180° - a) = -\text{Cos}\ a,\\
&\text{Tang}\ (180° - a) = -\text{Tang}\ a, && \text{Cotg}\ (180° - a) = -\text{Cotg}\ a.
\end{aligned}$$

7) По данной величинѣ тригонометрической линіи отыскать дугу ей соотвѣтствующую.

a) Пусть данный синусъ дуги равенъ m; отъ точки O (черт. 6), по прямымъ OK и $OK_{,}$, въ обѣ стороны отложивъ OG и $OG_{,}$, равныя m, и проведя $BGB_{,}$ и $B_{,,}G_{,}B_{,,,}$, параллельныя діаметру $AA_{,}$, по принятому знакоположенію получимъ, что $OG = CB \; = C_{,}B_{,} = + m$,

$$OG_{,} = C_{,}B_{,,} = CB_{,,,} = - m.$$

Поэтому, независимо отъ знака при m, и ограничиваясь только одною окружностію, для даннаго синуса получимъ четыре положительныя дуги:

$AB = a, \quad AB_{,} = \pi - a, \quad AB_{,,} = \pi + a, \quad AB_{,,,} = 2\pi - a,$

изъ которыхъ двѣ первыя соотвѣтствуютъ положительной величинѣ синуса, а двѣ послѣднія отрицательной.

b) Данный косинусъ дуги равенъ n, отыскать величину дуги ему соотвѣтствующей.

Отложивъ $OC = + n$ и $OC_{,} = - n$ (черт. 6), черезъ точки C и $C_{,}$, перпендикулярно къ $AA_{,}$, проведу CB и $C_{,}B_{,}$ и продолжу ихъ въ противуположную сторону, до пересѣченія съ окружностію въ точкахъ $B_{,,,}$, $B_{,,}$, то получимъ, что данному косинусу, независимо отъ знака, соотвѣтствуютъ четыре положительныя дуги

$AB = a, \quad AB_{,} = \pi - a, \quad AB_{,,} = \pi + a, \quad AB_{,,,} = 2\pi - a,$

изъ которыхъ первая и четвертая соотвѣтствуютъ косинусу положительному, а 2-ая и 3-ья отрицательному.

Такимъ же образомъ можно отыскать дуги, соотвѣтствующія и другимъ тригонометрическимъ линіямъ.

Примѣч. 1. Если $y = \operatorname{Sin} x$, $y' = \operatorname{Tang} x'$, $y'' = \operatorname{Sec} x''$, и т. д. то для выраженія условія обратнаго, пишутъ

$x = \operatorname{arc} \operatorname{Sin} y$, $x' = \operatorname{arc} \operatorname{Tang} y'$, $x'' = \operatorname{arc} \operatorname{Sec} y''$, и т. д.

т. е. x есть дуга, синусъ которой равенъ y,

x' — — — тангенсъ — — — — — y' и т. д.

или что дуга x'' соотвѣтствуетъ секансу y''.

Примѣч. 2. Если тригоном. линія дана отвлеченнымъ числомъ, то для построенія см. § 4, ст. 3, прим. 1 и 2. Пусть требуется построить уголъ β по $\operatorname{Sin} \beta = \frac{3}{5}$. Такъ какъ $\operatorname{Sin} = \frac{\text{перпенд.}}{\text{гипотен.}}$, слѣдоват. перпенд. = 3; гипотенуза = 5 (черт. 8). На произвольной прямой BX, отъ точки B до точки D отложивъ 5 равныхъ частей, изъ точки B, какъ центра, опишу дугу DC; поставивъ $DY \perp BX$, отложу $DF = 3$; наконецъ, проведя FC параллельно XB, соединю точки C и B прямою CB. Уголъ ABC будетъ требуемый, потому что $\operatorname{Sin} \beta = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{5}$.

Если дано, что $\operatorname{Cos} x = -\frac{2}{3}$, то отсѣкъ $= -2$, а гипотенуза $= 3$, потому что $\operatorname{Cos} = \frac{\text{отсѣку}}{\text{гипотенузу}}$ (§ 4, 4).

Здѣсь отсѣкъ отрицательный, слѣдоват. онъ взятъ не влѣво отъ вершины угла, а вправо. На неопредѣленной прямой отложивъ OA, равную 3-мъ произвольнымъ частямъ (черт. 6), и взявъ точку O за центръ, опишу дугу AB,F. Отъ точки O, на продолженіи AO, до точки C, отложивъ вправо двѣ такія же части, проведемъ $C,B, \perp AF$; соединивъ точку B, съ точкою O, получимъ требуемый уголъ $AOB,$.

Для построенія уравненія $\text{Tang}\, x = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, въ которомъ перпендикуляръ $= 5$ отсѣкъ $= 2$, отмѣривъ $OC = 2$ и проведя $CB \perp OA$., отлагаю $CB = 5$; соединивъ точки B и O, получу требуемый уголъ COB, потому что

$$\text{Tang}\, COB = \frac{BC}{CO} = \frac{5}{2}.$$

Для легчайшаго обзора пройденнаго предлагаемъ здѣсь полную таблицу тригонометрическихъ линій, съ постепеннымъ ходомъ ихъ измѣненія для цѣлой окружности.

ТАБЛИЦА
соотносительныхъ величинъ тригонометрическихъ линій.

Дуга	Sin	Cos	Tang	Sec	Cotg	Cosec
0°	0	1	0	1	∞	∞
$\frac{1}{2}\pi$	1	0	∞	∞	0	1
π	0	— 1	0	— 1	∞	∞
$\frac{3}{2}\pi$	— 1	0	∞	∞	0	— 1
2π	0	1	0	1	∞	∞
a	+ Sin a	+ Cos a	+ Tang a	+ Sec a	+ Cotg a	+ Cosec a
$- a$	— Sin a	+ Cos a	— Tang a	+ Sec a	— Cotg a	— Cosec a
$\frac{1}{2}\pi + a$	+ Cos a	— Sin a	— Cotg a	Cosec a	— Tang a	+ Sec a
$\frac{1}{2}\pi - a$	+ Cos a	+ Sin a	+ Cotg a	+ Cosec a	+ Tang a	+ Sec a
$\pi + a$	Sin a	— Cos a	+ Tang a	— Sec a	+ Cotg a	— Cosec a
$\pi - a$	+ Sin a	— Cos a	— Tang a	— Sec a	— Cotg a	+ Cosec a
$\frac{3}{2}\pi + a$	— Cos a	+ Sin a	— Cotg a	+ Cosec a	— Tang a	— Sec a
$\frac{3}{2}\pi - a$	— Cos a	- Sin a	+ Cotg a	— Cosec a	+ Tang a	— Sec a
$2\pi + a$	+ Sin a	+ Cos a	+ Tang a	+ Sec a	+ Cotg a	+ Cosec a
$2\pi - a$	— Sin a	+ Cos a	— Tang a	+ Sec a	— Cotg a	— Cosec a

Всѣ эти результаты легко могутъ быть повѣрены по чертежу, черезъ ихъ построеніе.

§ 6.

Основныя тригонометрическія формулы простыхъ дугъ.

Главнѣйшія отношенія между тригонометрическими линіями той же дуги могутъ быть выведены помощію равенства и подобія прямоугольныхъ треугольниковъ, а именно: $\Delta OCB = \Delta OGB$; $\Delta OAE = \Delta OBI$ и $\Delta ODH = \Delta OBK$ (черт. 6).

a) Положивъ дугу $AB = a$ и радіусъ круга $= 1$, изъ треугольника OCB получимъ $\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{OC}^2$, или, подставивъ вмѣсто равныхъ равныя, имѣемъ $1 = \text{Sin}^2 a + \text{Cos}^2 a$ . . . . (1),

откуда
$$\text{Sin}\, a = \pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 a},$$
$$\text{Cos}\, a = \pm (*) \sqrt{1 - \text{Sin}^2 a}.$$

b) Изъ ΔOBI получаемъ $OI^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BI}^2$; но какъ $OI = \text{Sec}\, a$ и $BI = AE = \text{Tang}\, a$,

то $\text{Sec}^2 a = 1 + \text{Tang}^2 a$ . . . . . . (2).

Слѣдовательно $\text{Tang}\, a = \sqrt{\text{Sec}^2 a - 1}$. Такимъ же образомъ выведемъ, что $\text{Cosec}^2 a = 1 + \text{Cotg}^2 a$.

c) Треугольникъ OAE подобенъ треугольнику OCB, откуда $AE : OA = CB : OC$, или

$\text{Tang}\, a : 1 = \text{Sin}\, a : \text{Cos}\, a$, слѣд. $\text{Tang}\, a = \dfrac{\text{Sin}\, a}{\text{Cos}\, a}$ . . . (3).

d) ΔODH подобенъ ΔOGB, слѣд. $DH : OD = GB : OG$,

или $\text{Cotg}\, a : 1 = \text{Cos}\, a : \text{Sin}\, a$, откуда $\text{Cotg}\, a = \dfrac{\text{Cos}\, a}{\text{Sin}\, a}$ . . . (4).

e) ΔOBJ подобенъ ΔBCO, слѣд. $OJ : OB = OB : OC$,

откуда $\text{Sec}\, a : 1 = 1 : \text{Cos}\, a$, или $\text{Sec}\, a = \dfrac{1}{\text{Cos}\, a}$ . . . (5).

(*) Двойной знакъ ($\pm$) предъ радикаломъ показываетъ, что искомому синусу можетъ соотвѣтствовать одна изъ найденныхъ величинъ (графическое построеніе которыхъ предложено въ § 5).

При извѣстной величинѣ угла ограниченіе производится по § 4, и двойственность уничтожится; такъ напрям. если опредѣляемый уголъ находится въ треугольникѣ, то $\text{Sin}\, a = + \sqrt{1 - \text{Cos}^2 a}$, притомъ для остраго угла $\text{Cos}\, a = + \sqrt{1 - \text{Sin}^2 a}$, для тупаго $\text{Cos}\, a = - \sqrt{1 - \text{Sin}^2 a}$.

f) Δ OBK подобенъ Δ OBG, слѣд. $OK : OB = OB : OG$,

откуда $\quad \text{Cosec}\ a : 1 = 1 : \text{Sin}\ a$, слѣд. $\text{Cosec}\ a = \dfrac{1}{\text{Sin}\ a}$ . . (6).

g) Δ OAE подобенъ Δ ODH, слѣд. $AE : OA = OD : DH$,

или $\quad \text{Tang}\ a : 1 = 1 : \text{Cotg}\ a$, откуда

$$\text{Tang}\ a = \frac{1}{\text{Cotg}\ a} \quad \text{и} \quad \text{Cotg}\ a = \frac{1}{\text{Tang}\ a} \quad . \ . \ . \quad (7).$$

Выразивъ эти формулы помощію правилъ, получимъ, что для той же дуги, или для того же угла:

a) *Синусъ квадратъ плюсъ косинусъ квадратъ равны единицѣ.*

b) *Секансъ квадратъ равенъ единицѣ плюсъ тангенсъ квадратъ.*

c) *Тангенсъ равенъ синусу дѣленному на косинусъ*

d) *Котангенсъ равенъ косинусу дѣленному на синусъ.*

e) *Единица есть средняя пропорціональная между секансомъ и косинусомъ.*

f) *Единица есть средняя пропорціональная между косекансомъ и синусомъ.*

g) *Единица есть средняя пропорціональная между тангенсомъ и котангенсомъ.*

Примѣч 1. Главнѣйшія изъ этихъ формулъ суть (1), (3) и (5), помощію которыхъ и могутъ быть выведены всѣ остальныя, и дѣйствительно: помноживъ всѣ члены формулы (1) на $\frac{1}{\text{Cos}^2 a}$, и замѣнивъ ихъ равными величинами, получимъ формулу (2).

Въ формулахъ (3) и (5) вмѣсто a поставивъ $\frac{\pi}{2} - a$, получимъ (4) и (6).

Наконецъ формула (7) получается отъ перемноженія формулъ (3) и (4).

Примѣч. 2. Чтобы въ формулахъ, нами выведенныхъ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), возстановить радіусъ круга, или что то же самое, отъ тригонометрическихъ линій угловъ перейти къ тригонометрическимъ линіямъ дугъ, надо только вездѣ вмѣсто $\text{Sin}\ a = \frac{\text{Sin}\ a}{1}$ подставить отношеніе $\frac{\text{Sin}\ a}{r}$, вмѣсто $\text{Cos}\ a = \frac{\text{Cos}\ a}{1}$ подставить $\frac{\text{Cos}\ a}{r}$ и т. д. (§ 4; 3) т. е. въ тригонометрическія линіи ввести знаменателемъ радіусъ даннаго круга.

Такимъ образомъ вмѣсто форм. (1) получимъ $1 = \frac{\text{Sin}^2 a}{r^2} + \frac{\text{Cos}^2 a}{r^2}$, откуда $\text{Sin}^2 a + \text{Cos}^2 a = r^2$.

Вмѣсто форм. (3) получимъ

$$\frac{\text{Tang}\ a}{r} = \frac{\frac{\text{Sin}\ a}{r}}{\frac{\text{Cos}\ a}{r}} = \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Cos}\ a}, \text{ или } \text{Tang}\ a = \frac{r.\text{Sin}\ a}{\text{Cos}\ a}.$$

Изъ форм. (5) $\frac{\text{Sec}\ a}{r} = \frac{1}{\frac{\text{Cos}\ a}{r}} = \frac{r}{\text{Cos}\ a}$, или $\text{Sec}\ a = \frac{r^2}{\text{Cos}\ a}$.

Помощію этихъ преобразованій формулы тригонометрическихъ линій *приводятся къ однородности*, и могутъ быть построены по правиламъ геометріи (*).

Примѣч. 3. Взаимная связь и зависимость между тригонометрическими линіями показываетъ намъ, что зная численную величину одной изъ нихъ, напр. Tang $a = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$, можно найти численныя значенія для всѣхъ остальныхъ тригонометрическихъ линій.

Опредѣляя сперва тѣ величины, которыя находятся въ непосредственной зависимости отъ данной, получимъ

$$\text{Sec } a = \sqrt{1 + \text{Tang}^2 a} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{n}; \quad \text{Sec } a = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Cotg } a = \frac{1}{\text{Tang } a} = \frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}; \qquad \text{Cotg } a = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Sin } a = \frac{\text{Tang } a}{\text{Sec } a} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{n}} = \frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}}; \qquad \text{Sin } a = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Cos } a = \frac{1}{\text{Sec } a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}}; \qquad \text{Cos } a = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Cosec } a = \frac{1}{\text{Sin } a} = \frac{\sqrt{n^2 + m^2}\,(**)}{m}; \qquad \text{Cosec } a = \frac{5}{3}.$$

Общее изслѣдованіе главнѣйшихъ формулъ. Помощію выведенныхъ нами основныхъ формулъ тригонометрическихъ (отъ 1 до 7, § 6), зная притомъ для каждой дуги величину Sin. и Cos., можемъ изслѣдовать всю теорію *соотносительныхъ величинъ* (5).

(*) *Законъ же однородности* состоитъ въ томъ, что во всѣхъ формулахъ, гдѣ радіусъ не принятъ за единицу, степень формулы, для обѣихъ частей уравненія необходимо должна быть таже самая, т. е. всѣ члены должны имѣть одинаковое число линейныхъ множителей.

(**) Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы вывели только *абсолютныя* величины тригонометрическихъ линій; но знаки $\pm$, соотвѣтствующіе каждому радикалу, показываютъ, что данному положительному тангенсу могутъ соотвѣтствовать два синуса, равные, но противоположные, также два косинуса, два секанса и два косеканса, и что верхніе знаки (т. е. +) при синусахъ и косекансахъ должны соотвѣтствовать верхнимъ же знакамъ при косинусахъ и секансахъ, а нижніе — нижнимъ, что очевидно изъ уравненія Tang $a = \frac{\text{Sin } a}{\text{Cos } a} = \frac{\text{Sec } a}{\text{Cosec } a}$. При тангенсѣ *отрицательномъ* знакоположеніе для синуса съ косинусомъ, должно быть принято обратное т. е. + и —, или — и +.

Для примѣра возьмемъ формулу (3) $\text{Tang}\ a = \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Cos}\ a}$.

1) Если дуга $= 0°$, то $\text{Sin}\ 0° = 0$, $\text{Cos}\ 0° = 1$, а потому и $\text{Tang}\ 0° = 0$. Если дуга увеличивается, то и синусъ увеличивается, а косинусъ уменьшается, поэтому и тангенсъ увеличивается.

2) Увеличеніе тангенса идетъ весьма быстро; такъ что при дугѣ въ 90°,

$$\text{Sin}\ 90° = 1,\ \text{Cos}\ 90° = 0,\ \text{поэтому Tang}\ 90° = \frac{1}{0} = \infty.$$

При увеличеніи дуги отъ 90° до 180° тангенсъ принимаетъ положеніе *отрицательное*, потому что синусъ остается *положительнымъ*, а косинусъ дѣлается *отрицательнымъ*.

Между этими предѣлами абсолютная величина тангенса уменьшается, потому что синусъ уменьшается, а косинусъ увеличивается.

3) При 180° тангенсъ равенъ нулю, потому что

$$\text{Tang}\ 180° = \frac{\text{Sin}\ 180°}{\text{Cos}\ 180°},\ \text{но Sin}\ 180° = 0\ \text{и Cos}\ 180° = -1.$$

При измѣненіи дуги отъ 180° до 270° тангенсъ снова дѣлается положительнымъ, потому что какъ синусъ, такъ и косинусъ оба отрицательные. При измѣненіи дуги отъ 180° до 270° численная величина тангенса увеличивается.

4) $\text{Sin}\ 270° = -1$, $\text{Cos}\ 270° = 0$, слѣдовательно

$$\text{Tang}\ 270° = \frac{\text{Sin}\ 270°}{\text{Cos}\ 270°} = \frac{-1}{0} = \infty.$$

Наконецъ между 270° и 360° тангенсъ есть отрицательный; абсолютная величина его между означенными предѣлами уменьшается отъ ∞ до 0; такъ что при дугѣ въ 360° тангенсъ снова равенъ 0.

Такимъ же образомъ можно изслѣдовать формулы

$$\text{Cotg}\ a = \frac{\text{Cos}\ a}{\text{Sin}\ a},\ \text{или}\ \text{Cotg}\ a = \frac{1}{\text{Tang}\ a}.$$

По формуламъ (5) и (6) видно, что величина и положеніе секанса зависятъ отъ косинуса, а косеканса — отъ синуса.

Примѣч. Результаты этихъ изслѣдованій должны вполнѣ согласоваться съ предложенною нами таблицею величинъ тригонометрическихъ линій, выводъ которой основанъ былъ на построеніяхъ графическихъ (см. § 5).

§ 7.

Выводъ тригонометрическихъ формулъ сложныхъ дугъ.

Задача 1.

Опредѣлить синусъ и косинусъ суммы и разности двухъ дугъ, зная синусъ и косинусъ каждой изъ нихъ.

Пусть дуга ABN обозначаетъ сумму двухъ дугъ (черт. 11), изъ которыхъ $AB = a$ есть большая, а $BN = b$ меньшая, слѣдоват. $ABN = (a + b)$; отложивъ $BN' = BN$, найдемъ что дуга $AN' = (a - b)$.

Проведя хорду NN' и радіусъ CB получимъ, что $CB \perp NN'$ и проходитъ черезъ середину D хорды NN'. Изъ точекъ N, B, N' на радіусъ CA опуствивъ перпендикуляры NS, BE и $N'S'$ имѣемъ

$$EB = \text{Sin}\ a, \qquad SN = \text{Sin}\ (a + b),$$
$$DN = \text{Sin}\ b, \qquad S'N' = \text{Sin}\ (a - b),$$
$$CE = \text{Cos}\ a, \qquad CS = \text{Cos}\ (a + b),$$
$$CD - \text{Cos}\ b, \qquad CS' = \text{Cos}\ (a - b).$$

Слѣдовательно вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы помощію первыхъ четырехъ линій и радіуса окружности, принятаго за единицу, найти величины четырехъ послѣднихъ выраженій.

Проведя $DO \perp CA$, а DJ и $N'J'$ параллельно CA, получимъ подобные треугольники CBE, CDO, NDJ, $N'DJ'$; исконыя линія могутъ быть опредѣлены помощію сторонъ этихъ треугольниковъ. И дѣйствительно, *для суммы данныхъ дугъ* имѣемъ

$$\text{Sin}\ (a + b) = SN = SJN = SJ + JN = OD + JN; \quad (1)$$
$$\text{Cos}\ (a + b) = CS = COS - CO - OS = CO - DI. \quad (2).$$

Такимъ же образомъ изъ равенства треугольниковъ NDJ и $N'DJ'$ получимъ

$$JN = J'D, \quad DJ = N'J', \text{ а потому}$$
$$OS = DJ = J'N' = OS', \text{ слѣдовательно}$$

для разности данныхъ дугъ

$$\text{Sin}\ (a - b) = S'N' = OJ' = OD - J'D = OD - JN; \quad (3)$$
$$\text{Cos}\ (a - b) = CS' = COS' = CO + OS' = CO + DJ. \quad (4).$$

Отнуда видно, что для опредѣленія синуса и косинуса разности дугъ необходимы тѣ же части, помощію которыхъ опредѣляются синусъ и косинусъ суммы тѣхъ же дугъ.

Эти части суть OD, JN, CO и DJ, и могутъ быть опредѣлены изъ слѣдующихъ пропорцій:

$OD : CD = EB : CB$, или $OD : \text{Cos}\, b = \text{Sin}\, a : 1$;
$JN : DN = CE : CB$, или $JN : \text{Sin}\, b = \text{Cos}\, a : 1$;
откуда $OD = \text{Sin}\, a\ \text{Cos}\, b$, и $JN = \text{Cos}\, a.\ \text{Sin}\, b$.
Также $CO : CD = CE : CB$, или $CO : \text{Cos}\, b = \text{Cos}\, a : 1$;
$DJ . DN = EB : CB$, или $DJ : \text{Sin}\, b = \text{Sin}\, a : 1$,
откудв $CO = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b$, и $DJ = \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b$.

Въ выраженія, нами найденныя (1), (2), (3), (4), вмѣсто равныхъ под ставивъ равныя, получимъ

$$\text{Sin}\,(a + b) = \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, b.\ \text{Cos}\, a \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

т. е. *Синусъ суммы двухъ дугъ равенъ синусу первой дуги, умноженному на косинусъ второй, вмѣстѣ съ произведеніемъ синуса второй на косинусъ первой*

$$\text{Cos}\,(a + b) = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b - \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

т. е. *Косинусъ суммы двухъ дугъ равенъ произведенію косинусовъ безъ произведенія синусовъ тѣхъ же дугъ*

$$\text{Sin}\,(a - b) = \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b - \text{Sin}\, b.\ \text{Cos}\, a \quad . \quad . \quad (3),$$

т. е *Синусъ разности двухъ дугъ равенъ синусу первой дуги, умноженному на косинусъ второй, безъ произведенія синуса второй дуги на косинусъ первой.*

$$\text{Cos}\,(a - b) = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

т. е. *Косинусъ разности двухъ дугъ равенъ произведенію косинусовъ этихъ дугъ, вмѣстѣ съ произведеніемъ ихъ синусовъ*

Наконецъ, соединяя формулы (1) съ (3) и (2) съ (4) § 7, получимъ двѣ общія формулы

$$\text{Sin}\,(a \pm b) = \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b \pm \text{Sin}\, b.\ \text{Cos}\, a \quad . \text{(формула 1)}$$
$$\text{и Cos}\,(a \pm b) = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b \mp \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b. \quad . \text{(формула 2)},$$

въ которыхъ двойные знаки соотвѣтствуютъ первый первому, второй второму.

Примъч. 1. При выводѣ формулъ (1) и (2) нами предложенномъ, мы предполагали каждую изъ данныхъ дугъ, а также и сумму ихъ, менѣе четверти окружности; но помощію подобныхъ же построеній и соотносительныхъ величинъ (§ 5) не трудно убѣдиться, что формулы эти справедливы и для всѣхъ возможныхъ случаевъ, въ какой бы четверти ни находились данныя и искомыя.

Предлагаемъ здѣсь доказательство для одного изъ частныхъ случаевъ этой задачи.

Пусть $m > 90^\circ$, то $m = {}^1/_2\pi + a$,
и $n > 90^\circ$, $n = {}^1/_2\pi + b$,
гдѣ $a < 90^\circ$ и $b < 90^\circ$.

Слѣдовательно $\text{Sin}\, m = \text{Cos}\, a$,
$\text{Cos}\, m = -\text{Sin}\, a$, или $\text{Sin}\, a = -\text{Cos}\, m$;
также $\text{Sin}\, n = \text{Cos}\, b$,
$\text{Cos}\, n = -\text{Sin}\, b$, или $\text{Sin}\, b = -\text{Cos}\, n$.

Отсюда: 1) $\text{Sin}\,(m+n) = \text{Sin}\,[\pi + (a+b)] = -\text{Sin}\,(a+b)$,
$= -\text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b - \text{Cos}\, a.\ \text{Sin}\, b$,
$= -(-\text{Cos}\, m).\ \text{Sin}\, n - \text{Sin}\, m.\ (-\text{Cos}\, n)$,
$= \text{Sin}\, m.\ \text{Cos}\, n + \text{Sin}\, n.\ \text{Cos}\, m$.

2) $\text{Sin}\,(m-n) = \text{Sin}\,(a-b) = \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b - \text{Sin}\, b.\ \text{Cos}\, a$.
$= (-\text{Cos}\, m).\ \text{Sin}\, n - (-\text{Cos}\, n).\ \text{Sin}\, m$,
$= \text{Sin}\, m.\ \text{Cos}\, n - \text{Sin}\, n.\ \text{Cos}\, m$.

3) $\text{Cos}\,(m+n) = \text{Cos}\,[\pi + (a+b)] = -\text{Cos}\,(a+b)$,
$= -\text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b$,
$= -\text{Sin}\, m.\ \text{Sin}\, n + (-\text{Cos}\, m).\ (-\text{Cos}\, n)$,
$= \text{Cos}\, m.\ \text{Cos}\, n - \text{Sin}\, m.\ \text{Sin}\, n$.

4) $\text{Cos}\,(m-n) = \text{Cos}\,(a-b) = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, a.\ \text{Sin}\, b$,
$= \text{Sin}\, m.\ \text{Sin}\, n + (-\text{Cos}\, m).\ (-\text{Cos}\, n)$,
$= \text{Cos}\, m.\ \text{Cos}\, n + \text{Sin}\, m.\ \text{Sin}\, n$.

Примъч. 2. Изъ чертежа видно, что $OD + DN > SN$, то и подавно $EB + DN > SN$, т. е. что $\text{Sin}\, a + \text{Sin}\, b > \text{Sin}\,(a+b)$; поэтому не должно смѣшивать выраженій *сумма синусовъ* и *синусъ суммы* двухъ дугъ.

Формулы для суммы синусовъ будутъ выведены въ слѣдующихъ задачахъ.

Задача 2.

Опредѣлить синусъ и косинусъ двойной дуги помощію синуса и косинуса данной дуги.

Уже доказано, что

$$\text{Sin}\,(a+b) = \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, b.\ \text{Cos}\, a \quad \ldots \quad (1),$$
$$\text{Cos}\,(a+b) = \text{Cos}\, a.\ \text{Cos}\, b - \text{Sin}\, b.\ \text{Sin}\, a \quad \ldots \quad (2),$$

въ обѣихъ формулахъ положивъ $b = a$, получимъ

$$\text{Sin}\, 2a = 2\, \text{Sin}\, a.\ \text{Cos}\, a \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

т. е. *синусъ двойной дуги равенъ удвоенному произведенію синуса на косинусъ той же дуги.*

$$\mathrm{Cos}\ 2\,a = \mathrm{Cos}^2\,a - \mathrm{Sin}^2\,a\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (4),$$

т. е. *косинусъ двойной дуги равенъ квадрату косинуса безъ квадрата синуса той же дуги.*

Здѣсь для отысканія какъ синуса, такъ и косинуса двойной дуги, должны быть извѣстны обѣ тригонометрическія линіи, т. е. синусъ и косинусъ данной дуги; но часто требуется опредѣлить синусы и косинусы двойныхъ дугъ, помощію одного синуса или одного косинуса.

Если извѣстенъ только одинъ синусъ данной дуги, то въ формулахъ (3) и (4), подставивъ вмѣсто равныхъ равныя, получимъ

$$\mathrm{Sin}\ 2\,a = 2\ \mathrm{Sin}\,a\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\,a}\ldots(5),\ \text{и}\ \mathrm{Cos}\ 2\,a = 1-2\ \mathrm{Sin}^2\,a\ldots(6),$$

если же извѣстенъ только косинусъ, то найдемъ

$$\mathrm{Sin}\ 2\,a = 2\ \mathrm{Cos}\,a\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\,a},\qquad \text{и}\ \mathrm{Cos}\ 2\,a = 2\ \mathrm{Cos}^2\,a - 1\ldots(7).$$

Примѣч. Если въ формулѣ $\mathrm{Sin}\,(a+b)$ положимъ $b = 2a$, то получимъ

$$\mathrm{Sin}\,(a+2a) = \mathrm{Sin}\ 3a = \mathrm{Sin}\ a.\ \mathrm{Cos}\ 2a + \mathrm{Cos}\ a.\ \mathrm{Sin}\ 2a,$$

вмѣсто $\mathrm{Cos}\ 2a$ и $\mathrm{Sin}\ 2a$ вставивъ выраженія (3) и (4) получимъ

$$\mathrm{Sin}\ 3a = 2\ \mathrm{Cos}^2\,a.\ \mathrm{Sin}\,a + \mathrm{Cos}^2\,a.\ \mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Sin}^3\,a$$

$$\left.\begin{aligned} &= 3\ \mathrm{Cos}^2\,a.\ \mathrm{Sin}\,a - \mathrm{Sin}^3\,a,\\ &= 3\ \mathrm{Sin}\,a - 4\ \mathrm{Sin}^3\,a.\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Cos}\ 3a &= \mathrm{Cos}^3\,a - 3.\ \mathrm{Cos}\,a.\ \mathrm{Sin}^2\,a\\ &= 4\ \mathrm{Cos}^3\,a - 3\ \mathrm{Cos}\,a.\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\beta)$$

Оба уравненія (α) и (β) третей степени.

Пусть дано по данному $\mathrm{Cos}\ a$ отыскать $\mathrm{Cos}\ \frac{a}{3}$.

Изъ формулы (β) имѣемъ

$$4\ \mathrm{Cos}^3\,a - 3\ \mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\ 3\,a = 0;$$

вмѣсто a поставивъ $\frac{a}{3}$, и дѣля обѣ части уравненія на 4, получимъ

$$\mathrm{Cos}^3\ \frac{a}{3} - \frac{3}{4}\ \mathrm{Cos}\ \frac{a}{3} - \frac{1}{4}\ \mathrm{Cos}\ a = 0.$$

Наконецъ, положивъ $\mathrm{Cos}\ \frac{a}{3} = x$, и $\mathrm{Cos}\ a = m$,

найдемъ
$$x^3 - \frac{3}{4}\,x - \frac{m}{4} = 0.$$

Такъ какъ первоначальная геометрія не предлагаетъ способовъ для построенія уравненій 3-ей степени, то задача о *раздѣленіи даннаго угла на три равныя части* и не можетъ быть рѣшена по пріемамъ элементарной геометріи.

Такимъ же образомъ можно отыскать синусы и косинусы *четверной, пятерной дуги* и вообще *кратныхъ дугъ.*

Задача 3.

Опредѣлить синусъ и косинусъ половинной дуги.

По данному косинусу цѣлой дуги.

Въ формулахъ, выведенныхъ нами въ предыдущей задачѣ, положивъ $2a = A$, найдемъ $a = \frac{1}{2}A$, подставивъ, получимъ

изъ (3) $\text{Sin}\, A = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}A \,.\, \text{Cos}\,\frac{1}{2}A$ . . . . (**8**),

изъ (4) $\text{Cos}\, A = \text{Cos}^2\,\frac{1}{2}A - \text{Sin}^2\,\frac{1}{2}A$ . . . . . (**9**),

изъ (6) $\text{Cos}\, A = 1 - 2\,\text{Sin}^2\,\frac{1}{2}A$ . . . . (**10**),

изъ (7) $\text{Cos}\, A = 2\,\text{Cos}^2\,\frac{1}{2}A - 1$ . . . . (**11**).

Изъ формулъ (**10**) и (**11**), опредѣляя $\text{Sin}\,\frac{1}{2}A$ и $\text{Cos}\,\frac{1}{2}A$.

получимъ $$\text{Sin}\,\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,A}{2}} \quad . \;.\; . \;(\mathbf{12}),$$

$$\text{и}\;\; \text{Cos}\,\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,A}{2}}\;(*). \quad . \;.\; . \;(\mathbf{13}),$$

т. е. (**12**) *Синусъ половинной дуги равенъ корню квадратному изъ дроби, въ которой числитель единица минусъ косинусъ цѣлой дуги, а знаменатель два.*

Изъ (**13**) *Косинусъ половинной дуги равенъ корню квадратному изъ дроби, въ которой числитель единица плюсъ косинусъ цѣлой дуги, а знаменатель два*

(*) Понятно, что обоимъ радикаламъ (въ форм. 12 и 13) необходимо должны соотвѣтствовать знаки $\pm$, потому что въ вопросѣ этомъ искомыя величины выражаются не помощію самой дуги, но помощію ея косинуса, а потому если дуга неизвѣстна, то вопросъ будетъ имѣть два рѣшенія, при извѣстной же дугѣ сомнѣнія въ выборѣ быть не можетъ. Если половинная дуга находится въ первой четверти, какъ то чаще и встрѣчается при вычисленіи треугольниковъ, то оба радикала должны быть положительные. Съ этимъ ограниченіемъ мы будемъ принимать и слѣдующія формулы, въ которыхъ знаки предъ радикаломъ не поставлены.

Болѣе подробныя изслѣдованія по этому предмету можно найти въ курсахъ тригонометріи: Sirodde и Lefebure de Fourcy.

Примѣч. Учащимся самимъ предлагаемъ опредѣлить синусъ и косинусъ половинной дуги помощію синуса цѣлой.

Формулы эти суть слѣдующія:

$$\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{Sin} A} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{Sin} A};$$

$$\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{Sin} A} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{Sin} A}.$$

Задача 4.

Опредѣлить тангенсъ суммы и разности двухъ дугъ, помощію тангенсовъ этихъ дугъ.

Изъ формулы $\operatorname{Tang} a = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} a}$ имѣемъ

$$\operatorname{Tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Sin}(a \pm b)}{\operatorname{Cos}(a \pm b)} = \frac{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Cos} b \pm \operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} a.\ \operatorname{Cos} b \mp \operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} b}.$$

Числителя и знаменателя послѣдней дроби раздѣливъ на первый членъ знаменателя, т. е. на $\operatorname{Cos} a.\ \operatorname{Cos} b$, и сдѣлавъ сокращенія, получимъ

$$\operatorname{Tang}(a \pm b) = \frac{\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} a} \pm \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} b}}{1 \mp \frac{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} a.\ \operatorname{Cos} b}},$$

но какъ $\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} a} = \operatorname{Tang} a$, и $\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} b} = \operatorname{Tang} b$, то подставивъ, получимъ

$$\operatorname{Tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Tang} a \pm \operatorname{Tang} b}{1 \mp \operatorname{Tang} a.\ \operatorname{Tang} b} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{14})$$

Прибавленіе. Помощію подобныхъ же преобразованій найдемъ, что

$$\operatorname{Cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Cotg} a.\ \operatorname{Cotg} b \mp 1}{\operatorname{Cotg} b \pm \operatorname{Cotg} a} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{15}).$$

Примѣч. Въ формулахъ (14) и (15) положивъ $a = 45$, получимъ

$$\frac{1 + \operatorname{Tang} b}{1 - \operatorname{Tang} b} = \operatorname{Tang}(45^\circ + b) = \operatorname{Cotg}(45^\circ - b).$$

$$\frac{1 - \operatorname{Tang} b}{1 + \operatorname{Tang} b} = \operatorname{Tang}(45^\circ - b) = \operatorname{Cotg}(45^\circ + b).$$

Задача 5.

Опредѣлить тангенсъ двойной дуги помощію тангенса данной дуги.

Въ формулѣ $\text{Tang}\,(a + b) = \dfrac{\text{Tang}\,a + \text{Tang}\,b}{1 - \text{Tang}\,a.\ \text{Tang}\,b}$

положивъ $a = b$,

получимъ $$\text{Tang}\,2a = \frac{2\,\text{Tang}\,a}{1 - \text{Tang}^2\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Подобнымъ же образомъ (изъ формулы 15) выводимъ

$$\text{Cotg}\,2\,a = \frac{\text{Cotg}^2\,a - 1}{2\,\text{Cotg}\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Задача 6.

Опредѣлить тангенсъ половинной дуги помощію синуса и косинуса цѣлой дуги.

По формулѣ $\text{Tang}\,a = \dfrac{\text{Sin}\,a}{\text{Cos}\,a}$ опредѣленіе тангенса всякой дуги зависитъ отъ ея синуса и косинуса. Слѣдовательно

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a};\ \text{но}\ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\,a}{2}},$$

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}\,a}{2}}\ \text{(Зад. 3; форм. 12 и 13)},$$

откуда $$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\,a}{1 + \text{Cos}\,a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Числителя и знаменателя дроби подъ радикаломъ (форм. 18) помноживъ на $(1 + \text{Cos}\,a)$,

получимъ

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}^2\,a}{(1 + \text{Cos}\,a)^2}} = \frac{\text{Sin}\,a}{1 + \text{Cos}\,a};$$

а помножая числит. и знам. дроби подъ радик. (форм. 18) на $(1 - \text{Cos}\,a)$,

$$\text{найдемъ}\ \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(1 - \text{Cos}\,a)^2}{1 - \text{Cos}^2\,a}} = \frac{1 - \text{Cos}\,a}{\text{Sin}\,a}.$$

Примѣч. Такимъ же образомъ можетъ быть найденъ и $\text{Cotg}\,{}^1/_2\,a$.

Задача 7.

Сыскать выраженіе для суммы и разности синусовъ, а также для суммы и разности косинусовъ двухъ дугъ.

Слагая и вычитая формулы

$$\text{Sin}\,(a+b) = \text{Sin}\,a.\ \text{Cos}\,b + \text{Sin}\,b.\ \text{Cos}\,a$$
$$\text{Sin}\,(a-b) = \text{Sin}\,a.\ \text{Cos}\,b - \text{Sin}\,b.\ \text{Cos}\,a.$$

получимъ:

$$\text{Sin}\,(a+b) + \text{Sin}\,(a-b) = 2\,\text{Sin}\,a.\ \text{Cos}\,b$$
$$\text{Sin}\,(a+b) - \text{Sin}\,(a-b) = 2\,\text{Sin}\,b.\ \text{Cos}\,a,$$

если положимъ $\left.\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right\}$ то $p > q$, откуда

$$a = \frac{1}{2}(p+q), \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{2}(p-q);$$

подставивъ, найдемъ

$$\text{Sin}\,p + \text{Sin}\,q = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(p+q).\ \text{Cos}\,\frac{1}{2}(p-q)\ \ .\ .\ (\mathbf{19}),$$

$$\text{Sin}\,p - \text{Sin}\,q = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(p-q).\ \text{Cos}\,\frac{1}{2}(p+q)\ \ .\ .\ (\mathbf{20}).$$

Такимъ же образомъ, черезъ соединеніе формулъ

$$\text{Cos}\,(a+b) = \text{Cos}\,a.\ \text{Cos}\,b - \text{Sin}\,a.\ \text{Sin}\,b$$
$$\text{Cos}\,(a-b) = \text{Cos}\,a.\ \text{Cos}\,b + \text{Sin}\,a.\ \text{Sin}\,b$$

и черезъ подставленіе вмѣсто $a+b$, $a-b$, a и b соотвѣтствующихъ величинъ, получимъ

$$\text{Cos}\,p + \text{Cos}\,q = 2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(p+q).\ \text{Cos}\,\frac{1}{2}(p-q)\ \ .\ .\ (\mathbf{21}),$$

$$\text{Cos}\,q - \text{Cos}\,p = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(p+q).\ \text{Sin}\,\frac{1}{2}(p-q)\ \ .\ .\ (\mathbf{22}).$$

т. е. (**19**) *Сумма синусовъ двухъ дугъ равна произведенію изъ дважды синуса полусуммы этихъ дугъ на косинусъ ихъ полуразности.*

(**20**) *Разность синусовъ двухъ дугъ равна произведенію изъ дважды синуса полуразности этихъ дугъ на косинусъ ихъ полусуммы.*

(**21**) *Сумма косинусовъ двухъ дугъ равна произведенію изъ дважды косинуса полусуммы этихъ дугъ на косинусъ ихъ полуразности.*

(**22**) *Разность косинусовъ двухъ дугъ равна произведенію изъ дважды синуса полусуммы этихъ дугъ на синусъ ихъ полуразности.*

Примѣч. 1. Всѣ эти формулы могутъ быть выведены также и помощію геометрическаго построенія; притомъ необходимо замѣтить, что въ послѣдней изъ нихъ (22) надо писать $\text{Cos}\, q - \text{Cos}\, p$, потому что если $p > q$, $\text{Cos}\, q > \text{Cos}\, p$.

Примѣч. 2. Помощію выраженій (19), (20), (21) и (22), нелогариѳмическія формулы могутъ быть преобразованы въ логариѳмическія, т. е. въ такія, которыя не заключаютъ въ себѣ суммъ и разностей тригонометрическихъ величинъ.

Пусть наприм. требуется вычислить уравненіе $x = \text{Sin}\, 38^\circ + \text{Sin}\, 26^\circ$.

Положивъ $p = 38^\circ$, $q = 26^\circ$, по формулѣ (19) получимъ

$$\text{Sin}\, 38^\circ + \text{Sin}\, 26^\circ = 2\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}(38^\circ + 26^\circ).\, \text{Cos}\, \frac{1}{2}(38^\circ - 26^\circ), \text{ или } x = 2\, \text{Sin}\, 32^\circ\, \text{Cos}\, 6^\circ,$$

откуда $\log x = \log 2 + \log \text{Sin}\, 32^\circ + \log \text{Cos}\, 6^\circ$.

Такимъ же образомъ вмѣсто $\text{Cos}\, 47^\circ - \text{Cos}\, 83^\circ$ (по форм. 22) получимъ

$$= 2\, \text{Sin}\, 65^\circ.\, \text{Sin}\, 18^\circ, \text{ слѣдовательно}$$

$$\log(\text{Cos}\, 47^\circ - \text{Cos}\, 83^\circ) = \log 2 + \log \text{Sin}\, 65^\circ + \log \text{Sin}\, 18^\circ.$$

Примѣч. 3. Въ уравн. (19) и (20) положивъ $p = 90^\circ$, получимъ

$$1 + \text{Sin}\, q = 2\, \text{Sin}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}q).\, \text{Cos}\, (45^\circ - \tfrac{1}{2}q) = 2\, \text{Sin}^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2}q),$$

$$1 - \text{Sin}\, q = 2\, \text{Cos}^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2}q) = 2\, \text{Sin}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}q).$$

Въ уравненіяхъ (21), (22) положивъ $q = 0$, получимъ

$$1 + \text{Cos}\, p = 2\, \text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}p \text{ и } 1 - \text{Cos}\, p = 2\, \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}p,$$

которыя тождественны съ уравн. (10) и (11, (зад. 3; § 7).

Теорема I.

Сумма синусовъ двухъ дугъ относится къ ихъ разности, какъ тангенсъ полусуммы этихъ дугъ относится къ тангенсу ихъ полуразности.

Раздѣливъ формулу (19) на (20), получимъ

$$\frac{\text{Sin}\, p + \text{Sin}\, q}{\text{Sin}\, p - \text{Sin}\, q} = \frac{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(p+q)\quad \text{Cos}\, \frac{1}{2}(p-q)}{\text{Cos}\, \frac{1}{2}(p+q).\ \text{Sin}\, \frac{1}{2}(p-q)},$$

но какъ

$$\frac{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(p+q)}{\text{Cos}\, \frac{1}{2}(p+q)} = \text{Tang}\, \tfrac{1}{2}(p+q)$$

и

$$\frac{\text{Cos}\, \frac{1}{2}(p-q)}{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(p-q)} = \text{Cotg}\, \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{1}{\text{Tang}\, \frac{1}{2}(p-q)},$$

то преобрезуя вторую часть формулы, и подставляя соотвѣтствующія выраженія, получимъ

$$\frac{\text{Sin } p + \text{Sin } q}{\text{Sin } p - \text{Sin } q} = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{Cos } \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\text{Cos } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{Sin } \frac{1}{2}(p-q)},$$

$$= \text{Tang}\tfrac{1}{2}(p+q) \times \text{Cotg}\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$= \text{Tang}\tfrac{1}{2}(p+q) \times \frac{1}{\text{Tang } \frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\text{Sin } p + \text{Sin } q}{\text{Sin } p - \text{Sin } q} = \frac{\text{Tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\text{Tang}\frac{1}{2}(p-q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Формула эта можетъ быть разложена въ слѣдующую пропорцію:

$$\text{Sin } p + \text{Sin } q : \text{Sin } p - \text{Sin } q = \text{Tang } \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{Tang } \tfrac{1}{2}(p-q).$$

Примѣч 1 Подобнымъ же образомъ могутъ быть выведены и слѣдующія формулы, иногда употребляемыя при вычисленіяхъ:

$$(24)\ \frac{\text{Sin } p + \text{Sin } q}{\text{Cos } p + \text{Cos } q} = \text{Tang } \tfrac{1}{2}(p+q); \quad \frac{\text{Sin } p + \text{Sin } q}{\text{Cos } q - \text{Cos } p} = \text{Cotg } \tfrac{1}{2}(p-q), \ \ldots \ (26)$$

$$(25)\ \frac{\text{Sin } p - \text{Sin } q}{\text{Cos } q - \text{Cos } p} = \text{Cotg } \tfrac{1}{2}(p+q); \quad \frac{\text{Sin } p - \text{Sin } q}{\text{Cos } p + \text{Cos } q} = \text{Tang } \tfrac{1}{2}(p-q), \ \ldots \ (27)$$

$$(28)\ \frac{\text{Cos } q + \text{Cos } p}{\text{Cos } q - \text{Cos } p} = \text{Cotg } \tfrac{1}{2}(p+q).\ \text{Cotg } \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{\text{Cotg } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{Tang } \frac{1}{2}(p-q)}.$$

Примѣч. 2. Изъ выведенныхъ нами формулъ могутъ получиться еще нѣкоторыя другія примѣчательныя слѣдствія, употребляемыя для сокращенія вычисленій.

1) $\text{Sin }(a+b) = \text{Sin } a.\ \text{Cos } b + \text{Sin } b.\ \text{Cos } a$ } перемноживъ,
$\text{Sin }(a-b) = \text{Sin } a.\ \text{Cos } b - \text{Sin } b.\ \text{Cos } a$ } получимъ

$$\text{Sin }(a+b).\ \text{Sin }(a-b) = \text{Sin}^2 a.\ \text{Cos}^2 b - \text{Sin}^2 b.\ \text{Cos}^2 a.$$

Вмѣсто $\text{Cos}^2 b$ и $\text{Cos}^2 a$ подставивъ равныя имъ величины $1 - \text{Sin}^2 b$ и $1 - \text{Sin}^2 a$ получимъ

$$\text{Sin }(a+b).\ \text{Sin }(a-b) = \text{Sin}^2 a - \text{Sin}^2 b \ \ldots\ldots\ldots \ (29).$$

2) Подобнымъ же образомъ доказали бы, что

$$\text{Cos }(a+b).\ \text{Cos }(a-b) = \text{Cos}^2 a - \text{Sin}^2 b \ \ldots\ldots\ldots \ (30).$$

3) Выраженіе $\frac{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} a}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} a}$ можетъ быть преобразовано въ $\text{Cos } a$.

И дѣйствительно, вмѣсто $\text{Tang } \frac{1}{2} a$ подставивъ равную ему величину $\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} a}{\text{Cos } \frac{1}{2} a}$, и сдѣлавъ сокращенія, получимъ

$$\frac{1 - \text{Tang}^2 \frac{1}{2} a}{1 + \text{Tang}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\text{Cos}^2 \frac{1}{2} a - \text{Sin}^2 \frac{1}{2} a}{\text{Cos}^2 \frac{1}{2} a + \text{Sin}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\text{Cos } a}{1} = \text{Cos } a \ \ldots\ldots\ldots \ (31).$$

4) Въ формулѣ Tang a + Tang b, подставивъ вмѣсто равныхъ равныя, получимъ

$$\text{Tang } a + \text{Tang } b = \frac{\text{Sin } a}{\text{Cos } a} + \frac{\text{Sin } b}{\text{Cos } b} = \frac{\text{Sin } a.\ \text{Cos } b + \text{Sin } b.\ \text{Cos } a}{\text{Cos } a.\ \text{Cos } b}, \text{ или}$$

$$\text{Tang } a \pm \text{Tang } b = \frac{\text{Sin } (a \pm b)}{\text{Cos } a.\ \text{Cos } b} \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Если же положимъ $a + b + c = 180°$, то не трудно вывести, что

$$\text{Tang } a + \text{Tang } b + \text{Tang } c = \text{Tang } a.\ \text{Tang } b.\ \text{Tang } c \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

5) Такимъ же образомъ получимъ

$$\text{Cotg } a \pm \text{Cotg } b = \frac{\text{Sin } (b \pm a)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } b}, \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

$$\text{Tang } a \pm \text{Cotg } b = \frac{\pm \text{Cos } (a \mp b)}{\text{Cos } a.\ \text{Sin } b}; \quad \ldots \ldots \quad (35).$$

$$\text{Cotg } a \pm \text{Tang } b = \frac{\text{Cos } (a \mp b)}{\text{Sin } a.\ \text{Cos } b} \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ радіусъ предполагаемъ быть равнымъ единицѣ, слѣдовательно, чтобы снова ввести этотъ радіусъ, необходимо вмѣсто каждой изъ тригонометрическихъ линій угла подставить тригонометрическую линію дуги, т. е. каждую изъ тригонометрическихъ линій угла раздѣлить на радіусъ даннаго круга.

§ 8.

Составленіе таблицъ тригонометрическихъ линій.

Предварительныя объясненія.

1. Составить *таблицы тригонометрическихъ линій* значитъ вычислить такіе ряды, въ которыхъ съ одной стороны находились бы всѣ дуги отъ 0° до 90°, а съ другой — величины соотвѣтствующихъ имъ синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ, котангенсовъ и проч.

Помощію такихъ таблицъ можно по данной величинѣ всякой дуги отыскать величину соотвѣтствующей ей тригонометрической линіи, и обратно, по величинѣ данной тригонометрической линіи можно отыскать величину соотвѣтствующей ей дуги. Отысканіе же тригонометрическихъ линій дугъ бо́льшихъ 90°, помощію извѣстныхъ формулъ приводится къ отысканію тригонометрическихъ линій дугъ первой четверти.

Величина дуги можетъ быть выражена двоякимъ образомъ: или въ отношеніи къ окружности, т. е. въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, или

въ отношенiи къ радiусу. Отыскать отношенiе данной дуги къ радiусу значитъ узнать, сколько цѣлыхъ радiусовъ, или извѣстныхъ частей его, отложилось бы по распрямленной дугѣ.

Вычисленiе производится слѣдующимъ образомъ:

Пусть данная дуга, выраженная въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, $= c^\circ, c', c''$.

Для изображенiя ея въ доляхъ радiуса составляется слѣдующая пропорцiя:

$$\left.\begin{matrix} 180^\circ - \pi \\ c^\circ - x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x : \pi = c^\circ : 180^\circ, \text{ гдѣ } \pi = \text{полуокружности}, \\ \text{откуда } \pi . c^\circ = 180^\circ . x; \end{matrix}$$

такимъ же образомъ для минутъ и секундъ находимъ

$$\pi . c' = 180 . 60' . y = 10800' . y,$$
$$\pi . c'' = 180 . 60 . 60'' . z = 648000'' . z, \text{ откуда}$$

$$c^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} . x, \qquad c' = \frac{10800'}{\pi} . y, \qquad c'' = \frac{648000''}{\pi} . z.$$

Помощiю подобныхъ вычисленiй найдемъ, что дуга, равная длиною одному радiусу, составляетъ $57^\circ\!,29578\ldots = 57^\circ\ 17'\ 44'',8\ldots$; длины же другихъ дугъ приближенно могутъ быть найдены по пропорцiи:

$$\left.\begin{matrix} 57^\circ\ 17'\ 45'' - R \\ A - x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x : R = A : (57^\circ\ 17'\ 45'' = a), \\ \text{откуда } x = \frac{A}{a} . R, \text{ или, обратно, } A = \frac{x . a}{R}. \end{matrix}$$

Таблицы тригонометрическихъ линiй бываютъ двухъ родовъ:

a) Въ нѣкоторыхъ изъ нихъ, соотвѣтственно съ дугами располагаются числа тригонометрическихъ линiй угловъ, или дугъ при радiусѣ $= 1$, т. е. *натуральныя величины* тригонометрическихъ линiй (*). При помощи такихъ таблицъ, по данному углу всегда можно прiискать величину соотвѣтствующей тригонометрической линiи, и обратно, по данной величинѣ тригонометрической линiи отыскать соотвѣтствующiй уголъ.

b) Чаще же всего встрѣчаются таблицы, въ которыхъ помѣщены не самыя числа, соотвѣтствующiя тригонометрическимъ линiямъ, но *логариѳмы этихъ чиселъ*.

При томъ для составленiя таблицъ достаточно отыскать величины тригонометрическихъ линiй только для угловъ до 45°, остальныя же находятся помощiю угловъ дополнительныхъ до 90°, или исполнительныхъ до 180;

(*) Натуральныя тригонометрическiя величины, а также величины дугъ въ доляхъ радiуса помѣщены въ прибавленiяхъ на концѣ этого руководства.

такъ $\quad \text{Sin}\ a = \text{Cos}\ (90° - a)$, слѣд. $\text{Sin}\ 75° = \text{Cos}\ 15°$;

$\text{Cos}\ a = \text{Sin}\ (90° - a)$, слѣд $\text{Cos}\ 75° = \text{Sin}\ 15°$;

также $\quad \text{Sin}\ a = \text{Sin}\ (180° - a)$, слѣд. $\text{Sin}\ 137° = \text{Sin}\ 43°$;

$\text{Cos}\ a = -\text{Cos}\ (180° - a)$, слѣд. $\text{Cos}\ 137° = -\text{Cos}\ 43°$;

(см. § **4**; и § **5**; 4, *a*, *b*).

Такъ какъ для составленія таблицъ должны быть сперва отысканы натуральныя величины тригонометрическихъ линій, и потомъ уже могутъ быть взяты ихъ логариѳмы, то и объяснимъ предварительно устройство первыхъ.

Мы намѣрены показать здѣсь только возможность составленія таблицъ тригонометрическихъ линій; дѣйствительное же вычисленіе такихъ таблицъ производится обыкновенно помощію формулъ высшей математики. (См. Callet, Tables de Logarithm., explication, и подробнѣе. Euler. Introductio in analysin infinitorum).

Возможность составленія таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.

Если мы отыщемъ синусъ угла въ одну секунду, то помощію формулы $\text{Cos}\ 1'' = \sqrt{1 - \text{Sin}^2\ 1''}$, не трудно найти и косинусъ этого угла, а слѣдовательно опредѣлятся и тангенсъ, котангенсъ, секансъ, и косекансъ $1''$, по формуламъ

$$\text{Tang}\ 1'' = \frac{\text{Sin}\ 1''}{\text{Cos}\ 1''},\ \text{Cotg}\ 1'' = \frac{\text{Cos}\ 1''}{\text{Sin}\ 1''},\ \text{Sec}\ 1'' = \frac{1}{\text{Cos}\ 1''},\ \text{Cosec}\ 1'' = \frac{1}{\text{Sin}\ 1''}$$

Зная величины тригонометрическихъ линій угла въ $1''$, получаемъ величины тригонометрическихъ линій угловъ въ $2''$, $3''$, и т. д., по формуламъ двойныхъ дугъ, или суммы дугъ.

слѣдовательно $\text{Sin}\ 2'' = 2\ \text{Sin}\ 1''.\ \text{Cos}\ 1''$,

$$\text{Cos}\ 2'' = \text{Cos}^2\ 1'' - \text{Sin}^2\ 1'',$$

$$\text{Sin}\ 3'' = \text{Sin}\ (1'' + 2'') = \text{Sin}\ 1''.\ \text{Cos}\ 2'' + \text{Sin}\ 2''.\ \text{Cos}\ 1'',$$

$$\text{Cos}\ 3'' = \text{Cos}\ (1'' + 2'') = \text{Cos}\ 1''.\ \text{Cos}\ 2'' - \text{Sin}\ 1''.\ \text{Sin}\ 2''\ (*).$$

Найдя синусъ и косинусъ данной дуги, по извѣстнымъ формуламъ нетрудно опредѣлить величины и остальныхъ тригонометрическихъ линій того же угла.

Такимъ образомъ можно составить таблицы тригонометрическихъ линій черезъ каждую секунду, или черезъ $10''$, сообразуясь съ желаемою точностію и полнотою.

Вычисленіе послѣдовательныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ дугъ можетъ быть весьма упрощено помощію формулъ, предложенныхъ англійскимъ геометромъ Томасомъ Симпсономъ (Thomas Simpson). Вотъ на чемъ основанъ этотъ выводъ, уже доказано, что

$$\text{Sin}\ (a + b) + \text{Sin}\ (a - b) = 2.\ \text{Sin}\ a.\ \text{Cos}\ b,$$
$$\text{Cos}\ (a + b) + \text{Cos}\ (a - b) = 2.\ \text{Cos}\ a.\ \text{Cos}\ b;$$

(*) По причинѣ малости дугъ, для полученія $\text{Sin}\ 2''$, $3''$, $4''$ и т. д. до $10'$ въ семизначныхъ таблицахъ достаточно $\text{Sin}\ 1''$ помножить на 2, на 3, на 4, и т. д.

формулы эти могутъ быть преобразованы въ слѣдующія:

$$\mathrm{Sin}\,(a+b)=\mathrm{Sin}\,a\times 2\,\mathrm{Cos}\,b+\mathrm{Sin}\,(a-b)\times -1,$$
$$\mathrm{Cos}\,(a+b)=\mathrm{Cos}\,a\times 2\,\mathrm{Cos}\,b+\mathrm{Cos}\,(a-b)\times -1.$$

Если положимъ $a=mb$, то будетъ:

$$\mathrm{Sin}\,(m+1)\,b=\mathrm{Sin}\,mb\times 2\,\mathrm{Cos}\,b+\mathrm{Sin}\,(m-1)\,b\times -1; \quad \ldots\ldots (\alpha),$$
$$\mathrm{Cos}\,(m+1)\,b=\mathrm{Cos}\,mb\times 2\,\mathrm{Cos}\,b+\mathrm{Cos}\,(m-1)\,b\times -1; \quad \ldots\ldots (\beta),$$

т. е. *чтобы получить синусъ какого либо множителя,* $(m+1)\,b$, *дуги* b, *надобно помножить синусы множителей, непосредственно меньшихъ* mb *и* $(m-1)\,b$ *на постоянныя количества* $2\,\mathrm{Cos}\,b$ *и* -1, *и потомъ сложить оба произведенія. Тотъ же законъ составленія и для косинуса.*

$$\text{А потому } \mathrm{Sin}\,4''=\mathrm{Sin}\,3''\times 2\,\mathrm{Cos}\,1''+\mathrm{Sin}\,2''\times -1,$$
$$\mathrm{Cos}\,4''=\mathrm{Cos}\,3''\times 2\,\mathrm{Cos}\,1''+\mathrm{Cos}\,2''\times -1, \text{ и т. д.}$$

Примѣч. Нѣкоторыя изъ тригонометрическихъ линій могутъ быть весьма легко найдены помощію геометрическихъ построеній и примѣненія алгебры къ геометрическимъ теоремамъ.

Пусть дуга DC равна $30°$ (черт. 8), то дуга $CDC'=60°$; а слѣдовательно, при радіусѣ $=1$, $\mathrm{Sin}\,30°=\frac{1}{2}$, потому что $\mathrm{Sin}\,30°$ есть половина хорды отъ дуги въ $60°$; хорда же дуги въ $60°$ равна радіусу.

Слѣдовательно помощію стороны *правильнаго 6-тиугольника* находимъ: $\mathrm{Sin}\,30°=\mathrm{Cos}\,60°=\frac{1}{2}=0{,}500.$

$$\mathrm{Cos}\;30°=\mathrm{Sin}\;60°=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=0{,}866,$$

$$\mathrm{Tang}\;30°=\mathrm{Cotg}\;60°=\frac{\mathrm{Sin}\;30°}{\mathrm{Cos}\;30°}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}=0{,}577,$$

$$\mathrm{Cotg}\;30°=\mathrm{Tang}\;60°=\frac{\mathrm{Cos}\;30°}{\mathrm{Sin}\;30°}=\sqrt{3}=1{,}732;$$

$$\mathrm{Sec}\;30°=\mathrm{Cosec}\;60°=\frac{1}{\mathrm{Cos}\;30°}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}=1{,}154,$$

$$\mathrm{Cosec}\;30°=\mathrm{Sec}\;60°=\frac{1}{\mathrm{Sin}\;30°}=2=2{,}000.$$

а по формуламъ половинныхъ дугъ находимъ тригонометрическія линіи $15°$; $7°\,30'$; и ихъ дополненій, т. е. $75°$ и $82°\,30'$.

Такимъ же образомъ, помощію стороны *квадрата*,

$\mathrm{Sin}\;45°=\mathrm{Cos}\;45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}707$.;

$\mathrm{Tang}\;45°=\mathrm{Cotg}\;45°=1$; $\mathrm{Sec}\;45°=\mathrm{Cosec}\;45°=\sqrt{2}=1{,}414$;

а помощію формулъ половинныхъ дугъ находимъ тригонометрическія линіи $22°\,30'$; $11°\,15'$ и т. д и ихъ дополненій $67°\,30'$; $78°\,45'$.

Помощію стороны *правильнаго 10-ти угольника*

$$\text{Sin } 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 0{,}309;\ \text{Cos } 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}951;$$

взявъ половинныя дуги, получимъ тригонометрическія линіи 9°; 4° 30′; 2° 15′ и т. д., а помощію дугъ двойныхъ и дополнительныхъ отыщемъ тригонометрическія линіи 36°; 72°; 54°; 81°; 85° 30′; 87° 45′ и т. д.

Взявъ Sin (18° — 15°) и Cos (18° — 15°) найдемъ Sin 3° и Cos 3°.

Такимъ образомъ, черезъ послѣдовательное дѣленіе дуги пополамъ, нисходя къ меньшимъ величинамъ, можно дойти до опредѣленія Sin 1″; но какъ способъ этотъ весьма предолжителенъ, то и предлагаемъ далѣе другой, кратчайшій.

Изъ объясненій, нами приведенныхъ, видно, что отысканіе всѣхъ величинъ тригонометрическихъ линій зависитъ отъ синуса угла въ 1″; для отысканія же этой величины съ извѣстною степенью приближенія, докажемъ предварительно слѣдующія теоремы:

Теорема 2.

Всякая дуга, находящаяся въ первой четверти окружности, болѣе своего синуса и менѣе своего тангенса.

Пусть дана дуга $AB = a$, то $AD = \text{Sin } a$ (черт. 12), $BC = \text{Tang } a$. Чтобы доказать, что $\text{Sin } a < a < \text{Tang } a$, проведемъ хорду AB, то получимъ

$$\Delta\, AOB < \text{площ. сект. } AOB < \Delta\, BOC, \text{ или}$$

$$\frac{AD \times OB}{2} < \frac{\smile AB \times OB}{2} < \frac{BC \times OB}{2};$$

раздѣливъ члены этого неравенства на $\frac{OB}{2}$, получимъ

$$AD < \smile AB < BC, \text{ или } \text{Sin } a < a < \text{Tang } a.$$

При этомъ понятно, что чѣмъ болѣе дуга уменьшается, тѣмъ ближе синусъ подходитъ къ тангенсу, такъ что, при дугѣ безконечно малой, синусъ сольется съ дугою и съ тангенсомъ, и отношенія $\frac{\text{Tang } a}{\text{Sin } a}$, $\frac{\text{Tang } a}{a}$, $\frac{a}{\text{Sin } a}$ будутъ имѣть *общимъ предѣломъ единицу*.

Эти доводы могутъ быть подтверждены формулою $\text{Tang } a = \frac{\text{Sin } a}{\text{Cos } a}$, откуда $\frac{\text{Tang } a}{\text{Sin } a} = \frac{1}{\text{Cos } a}$; но съ уменьшеніемъ дуги косинусъ приближается къ единицѣ, слѣдовательно и отношеніе $\frac{\text{Tang } a}{\text{Sin } a}$, при уменьшеніи дуги a, приближается къ 1. Тоже самое можно сказать и о дробяхъ $\frac{\text{Tang } a}{a}$ и $\frac{a}{\text{Sin } a}$, потому что дуга a заключается между ея синусомъ и тангенсомъ.

Теорема 3.

Разность между дугою отъ 0° до 90° и ея синусомъ менье куба дуги.

Доказательство Tang$a > a$, или $\frac{\text{Sin } a}{\text{Cos } a} > a$,

слѣдовательно $\text{Sin } a > a. \text{Cos } a$,

то и подавно $\text{Sin } a > a. \text{Cos}^2 a$;

откуда $\text{Sin } a > a - a \text{ Sin}^2 a$;

но $a > \text{Sin } a$,

слѣдовательно $\text{Sin } a > a - a^3$,

или наконецъ $a - \text{Sin } a < a^3$.

Но какъ $\text{Sin } a < a$, то $\text{Sin } \frac{1}{2} a < \frac{a}{2}$, и $\text{Sin}^2 \frac{1}{2} a < \frac{a^2}{4}$;

притомъ $1 - \text{Cos } a = 2 \text{ Sin}^2 \frac{1}{2} a$, слѣд. $1 - \text{Cos } a < \frac{a^2}{2}$, т. е.

что разность между единицею и косинусомъ всегда меньше половины квадрата соотвѣтствующей дуги.

Примѣч. Помощію болѣе точныхъ выводовъ можно было бы доказать, что для всякой дуги, находящейся между 0 и 30°, разность между дугою и соотвѣтствующимъ ей синусомъ *менѣе четвертой*, и даже *менѣе шестой части куба дуги.*

Теоремы, нами предложенныя, прямо показываютъ, имѣетъ-ли вліяніе погрѣшность на извѣстную цыфру въ десятичныхъ знакахъ синуса или косинуса.

Задача 8.

Отыскать приблизительно величину синуса дуги въ одну секунду, при радіусѣ, равномъ единицѣ.

Рѣшеніе. Изъ геометріи извѣстно, что при діаметрѣ, равномъ единицѣ, окружность выражается числомъ $\pi = 3{,}14159265.$, то при $R = 1$, окружность $= 6{,}2831....$

слѣдоват. $\pi = 3{,}141592... = \frac{1}{2}$ окружности.

Но $\frac{1}{2}$ окружн. $= 180° = 10800' = 648000''$; поэтому величина дуги въ $1'' = \frac{3{,}14159265}{648000} = 0{,}000004848.....$, (§ 8, 1)

или величина дуги въ $1'' = 0{,}000005$ (приблизительно).

Но какъ разность между величиною дуги и ея синусомъ менѣе $(0{,}000005)^3$, т. е. менѣе одной десятитысячбилліонной доли,

то $\text{Sin } 1'' = 0{,}000004848...$;

поэтому $\log \text{Sin } 1'' = \overline{6}{,}685575$, или, дополняя характеристику 10-ю, полу-

чимъ log Sin 1″ = 4,685575. Такъ и находимъ въ таблицахъ; а по Sin 1″ опредѣлимъ и Cos 1″ и т. д. (§ 8).

Примѣч. Такимъ же образомъ, вычисливъ Sin 1′ = 0,000290888 и Cos 1′, могли бы перейти къ вычисленію тригонометрическихъ линій 2′, 3′ и т. д.; и наконецъ 1°, 2°, 3° и т. д.

Чтобы еще болѣе убѣдиться въ примѣнимости Теор. 3 для отысканія предѣла погрѣшности, предложимъ себѣ вычислить Sin 10′.

Дуга, соотвѣтствующая 10′ есть 0,00290888, но Arc 10′ — Sin 10′ < (0,00290888)³, слѣдовательно Sin 10′ > 0,00290888 — 0,0000000246 или Sin 10′ > 0,0029068554, поэтому, если примемъ Sin 10′ = 0,00290888, какъ величину находящуюся между данными предѣлами, то можемъ быть увѣрены, что погрѣшность не достигаетъ трехъ стомилліонныхъ долей.

2. О таблицахъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ и о ихъ употребленіи.

Помощію способовъ нами предложенныхъ можно составить слѣдующую таблицу натуральныхъ величинъ синусовъ и косинусовъ отъ 0° до 45°, черезъ каждые 5°.

°	Sin	Cos	°
0	0,000	1,000	90
5	0,087	0,996	85
10	0,174	0,985	80
15	0,259	0,966	75
20	0,342	0,940	70
25	0,423	0,906	65
30	0,500	0,866	60
35	0,578	0,819	55
40	0,643	0,766	50
45	0,707	0,707	45

3. Натуральныя тригонометрическія величины въ треугольникѣ. Если бы мы, начертивъ прямоугольный треугольникъ, котораго *гипотенузу приняли бы за единицу*, и увеличивая *одинъ изъ его острыхъ угловъ* отъ 1° до 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ и т. д. градусовъ, по способамъ нами предложеннымъ, вычислили *сторону противолежащую этому углу*, то получили бы *таблицу натуральныхъ величинъ синусовъ каждаго изъ острыхъ угловъ*, черезъ 1 градусъ (§ 4, ст. 4. 5).

Если бы, при гипотенузѣ = 1, вычисляли сторону, *прилежащую этому углу*, при 1°, 2-хъ, 3-хъ, и т. д. градусахъ, то получили бы *таблицу натуральныхъ величинъ косинусовъ каждаго изъ острыхъ угловъ*, черезъ одинъ градусъ.

Въ томъ же треугольникѣ, при постепенномъ увеличеніи остраго *угла* отъ нуля черезъ одинъ градусъ, *принявъ за единицу сторону прилежащую этому углу*, если бы для каждаго измѣненія угла черезъ одинъ градусъ, вычислили сторону *противолежащую*, то составили бы *таблицу тангенсовъ*, а вычисляя *гипотенузу*, по сторонѣ прилежащей, получили бы таблицу *секансовъ*.

Наконецъ, *принимая за единицу сторону противолежащую данному острому углу*, и вычисляя сторону ему *прилежащую*, получили бы *таблицу котангенсовъ*, а вычисляя *гипотенузу* по сторонѣ противолежащей, получили бы таблицу натуральныхъ величинъ *косекансовъ*.

4. Интерполяція. Составивъ такимъ образомъ напримѣръ таблицу натуральныхъ величинъ синусовъ послѣдовательно для каждаго градуса, и потомъ для каждыхъ 10′, замѣтимъ, что разности ихъ величинъ, при малыхъ углахъ почти пропорціональны самымъ угламъ, такъ напр., при 6 десятичн. знакахъ, взявъ три рядомъ стоящія величины, получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\sin 7^\circ = 0{,}121870\ (^*)\\ \sin 7^\circ\,10' = 0{,}124756\\ \sin 7^\circ\,20' = 0{,}127942\end{array}\right\}$$ Общая разность между среднею величиною и каждою изъ крайнихъ $= 0{,}002886$.

Слѣдовательно можно положить, что для синуса, между данными предѣлами, при измѣненіи угла на 10′, величина синуса измѣняется на 0,002886, поэтому, при увеличеніи угла

на 1′, синусъ увеличивается на $0{,}002886 \times \frac{1}{10}$,
для 2′ . . . . $0{,}002886 \times \frac{2}{10}$ и т. д.

Слѣдовательно

$$\sin 7^\circ\,1' = 0{,}121870 + 0{,}0002886 = 0{,}1221586,$$
$$\sin 7^\circ\,2' = 0{,}121870 + 0{,}0005772 = 0{,}1224472.$$

Способъ, употребленный нами, для отысканія соотвѣтствующихъ среднихъ величинъ между данными, называется *интерполяціею* или *интерполированіемъ*.

Подобнымъ же образомъ можно отыскать соотвѣтствующую величину синуса каждаго изъ угловъ, а также не находящіяся въ таблицахъ и остальныя тригонометрическія величины. При вычисленіи же косинусовъ и котангенсовъ угловъ, въ таблицахъ не находящихся, необходимо принимать въ соображеніе, что съ увеличеніемъ угла косинусъ и котангенсъ, уменьшаются.

(*) Вмѣсто 0,121869.

Помощію интерполированія нетрудно рѣшить вопросъ обратный, т. е, по данной тригонометрической величинѣ (наприм. синуса, или косинуса), въ *таблицахъ не находящейся*, *отыскать уголъ ей соотвѣтствующій*. Пусть наприм, требуется отыскать уголъ, котораго синусъ есть 0,866324, или, что тоже самое, по данной гипотенузѣ треугольника, равной единицѣ, и по одной изъ сторонъ его, равной 0,866324, отыскать уголъ противолежащій этой сторонѣ.

Ближайшій меньшій синусъ, въ таблицахъ находящійся, есть 0,866025 и принадлежитъ углу въ 60°. Ближашій большій синусъ есть Sin 60° 10′ = 0,867476. Разность между ближайшимъ большимъ и ближайшимъ меньшимъ синусомъ равна 0,001451; но данный синусъ болѣе ближайшаго меньшаго на 0,000299, слѣдовательно и искомый уголъ болѣе 60° на такое число минутъ n, которое менѣе 10′ во столько же разъ, во сколько 0,000299 менѣе 0,001451, слѣд. $n : 10' = 299 : 1451$, откуда $n = 2'$,. . . . . Поэтому уголъ, соотвѣтствующій синусу 0,866324, равенъ 60° 2′.

Для упражненія предлагаемъ учащимся произвести нѣсколько интерполированій по таблицамъ натуральныхъ тригоном. величинъ, приложеннымъ въ концѣ этого руководства (*).

Примѣч. Для удобства интерполированія, въ нѣкоторыхъ таблицахъ, въ особомъ столбцѣ, помѣщаются послѣдовательно *табличныя разности* натуральныхъ величинъ синусовъ и косинусовъ, а также ихъ *пропорціональныя части*, соотвѣтственно съ измѣненіемъ угла на 1′, или на 1″. См. Sammlung mathemat. Tafeln von Vega, herausgegeb. von Hülsse, Taf. III.

О таблицахъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

Обзоръ главнѣйшихъ правилъ для употребленія таблицъ тригонометрическихъ величинъ. Такъ какъ вычисленіе треугольниковъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, можетъ быхь весьма упрощено черезъ приложеніе логариѳмовъ, то и тригонометрическія таблицы, какъ мы уже сказали, заключаютъ въ себѣ чаще не самыя тригонометрическія величины, но логариѳмы этихъ величинъ

(*) Натуральные синусы на каждую минуту находятся въ Таблиц. Кн. Голицына, см. Табл. 57, изд. 1854 г.; также въ руководствѣ Bobrik's Pract. Seefahrtskunde и во многихъ другихъ таблицахъ.

Почти во всякихъ таблицахъ помѣщается обыкновенно объясненіе ихъ расположенія, а также рѣшаются два главные вопроса:

***По данному углу въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, въ таблицахъ находящемуся, или не находящемуся, отыскать логариѳмъ тригонометрической величины*, и обратно:**

По данному логариѳму тригонометрической величины отыскать соотвѣтствующій ей уголъ или дугу.

Кромѣ того, для рѣшенія треугольниковъ необходимо умѣть рѣшать два подобные же вопроса, относящіеся къ таблицамъ логариѳмовъ чиселъ, а именно:

Данному числу пріискать соотвѣтствующій логариѳмъ, и обратно:
Данному логариѳму пріискать соотвѣтствующее число.
Правила для рѣшенія этихъ вопросовъ помѣщены въ таблицахъ логариѳмовъ.

Главнѣйшія замѣчанія, относящіяся почти ко всѣмъ таблицамъ тригонометрическихъ линій, состоятъ въ слѣдующемъ:

а) Всѣ синусы, кромѣ угловъ $90°$ и $270°$, и косинусы, кромѣ угловъ $0°$ и $180°$, какъ для острыхъ, такъ и для тупыхъ угловъ, суть правильныя дроби, т. е. < 1; поэтому логариѳмы ихъ имѣютъ отрицательныя характеристики и положительныя мантиссы. Для избѣжанія неудобства производить дѣйствія надъ величинами отрицательными и положительными, математики согласились: всѣ логариѳмы синусовъ и косинусовъ, а также и логариѳмы другихъ тригонометрическихъ линій, увеличить 10-ю единицами. Поэтому, если $\text{Sin } 1'' = 0{,}000004848$, то $\log \text{Sin } 1'' = \overline{6}{,}685575 + 10 = 4{,}685575$ (§ 8; 1; зад.). Такимъ же образомъ, если $\text{Sin } 1' = 0{,}000290888$ или $0{,}0002909$, то $\log \text{Sin } 1' = \overline{4}{,}463726 + 10 = 6{,}463726$; которые и находятся во всѣхъ таблицахъ (*).

(*) Числа эти въ нѣкоторыхъ руководствахъ и таблицахъ названы cologarithmes т. е. *кологариѳмами*, тригонометрическихъ величинъ.

При составленіи этого руководства мы пользовались стереотипными таблицами, составленными для употребленія въ Морскомъ кадетскомъ корпусѣ С. П. Б. 1860 и 1862. Введеніе, а также статья объ употребленіи этихъ таблицахъ, изложены г. Профессоромъ І. Сомовымъ. Таблицы эти составлены съ *шестью* десятичными знаками; эту степень точности можно считать совершенно достаточною для большей части геодезическихъ, астрономическихъ и навигаціонныхъ вычисленій; въ вычисленіяхъ по предметамъ архитектуры, физики и механики также не требуется большей точности. Какъ теорія численныхъ приближеній такъ и практика убѣждаютъ насъ, что *семизначныя* таблицы, при вычисленіи треугольниковъ, даютъ степень приближенія до 1''; *шестизначныя* до 30'', а *пятизначныя* до 1'; въ числахъ же до, 10000. (См. теорія численныхъ приближеній, Беренса; Вычисленіе по приближенію, Ѳ. Симашко, Théorie des approximations, par Vieille; Théorie elémentaire des Logarithmes, par M. Valles). Астрономъ Лаландъ вычислилъ множество затмѣній по *пятизначнымъ* таблицамъ.

b) Все сказанное нами о дополненіяхъ 10-ю единицами примѣняется и къ таблицамъ логариѳмовъ тангенсовъ, котангенсовъ и другихъ тригонометрическихъ линій. Поэтому необходимо должно помнить, что истинный логариѳмъ тригонометрической линіи равенъ логариѳму показанному въ таблицахъ безъ 10.

Такъ истинный log Tang $2^\circ\ 50' = 8{,}694529 - 10 = \overline{2}{,}694529$, а log Cotg $2^\circ\ 50' = 11{,}305471 - 10 = 1{,}305471$.

c) Избѣгнуть отрицательныхъ характеристикъ въ логариѳмахъ тригонометрическихъ линій можно еще и слѣдующимъ образомъ: для этого полагаютъ, что таблицы тригонометрическихъ линій вычислены не при $r = 1$, а при $r = 10^{10} = 10\,000.000.000$, котораго логариѳмъ есть 10.

Поэтому, положивъ $\smile EB = a$, $\smile FC = a'$ (черт. 7), изъ которыхъ первая дуга описана радіусомъ $AE = r = 1$, а вторая радіусомъ $AF = r' = 10^{10}$, и обѣ соотвѣтствуютъ тому же углу FAC, получимъ (§ 4, 2)

$$\text{Sin}\, a' = \text{Sin}\, a \times 10^{10};\ \text{откуда}\ \log \text{Sin}\, a' = \log \text{Sin}\, a + 10;$$
$$\text{Cos}\, a' = \text{Cos}\, a \times 10^{10};\ \text{откуда}\ \log \text{Cos}\, a' = \log \text{Cos}\, a + 10;$$

такимъ образомъ и для прочихъ тригонометрическихъ линій.

Отсюда видно, что для полученія логариѳмовъ тригоном. линій при радіусѣ $= 10^{10}$ должно увеличить 10-ю единицами тѣ, которые были вычислены при $r = 1$. Черезъ это предположеніе всѣ логариѳмы тригонометрическихъ линій будутъ положительными, какъ бы ни была мала дуга, для которой производится вычисленіе.

d) Если при вычисленіи два, три, четыре или нѣсколько такихъ увеличенныхъ логариѳмовъ будутъ сложены, то и сумма увеличится 20-ю, 30-ю, 40 и т. д. единицами въ характеристикѣ. Иногда случается, что полученный такимъ образомъ логариѳмъ долженъ быть раздѣленъ напр. на 2, то и полученное частное будетъ заключать въ характеристикѣ 10, 15 или 20 единицъ лишнихъ. Если же надо было бы сумму раздѣлить на 3, то полученный результатъ былъ бы болѣе дѣйствительнаго на $6\frac{2}{3}$, 10, $13\frac{1}{3}$. Для избѣжанія этого неудобства, стараются уничтожить дробныя величины въ вычитаемыхъ характеристикахъ, и съ одной стороны къ характеристикѣ прибавляютъ, а съ другой отъ вычитаемой характеристики отнимаютъ еще столько единицъ, чтобы по раздѣленіи ея на даннаго дѣлителя, въ окончательномъ результатѣ получились только десятки, или кратныя ихъ величины, т. е. 20, 30 и т. д

Пусть, напримѣръ, логариѳмическій результатъ, заключающій въ себѣ лишнихъ 20 единицъ, *долженъ быть раздѣленъ на 3. Для этого къ предстоящей* характеристикѣ прибавляются еще 10 единицъ, а отъ вычитаемой, кромѣ прежнихъ 20-ти, отнимаютъ еще 10; тогда вычитаемыхъ единицъ будетъ 30, которыя будучи раздѣлены на 3, увеличиваютъ *окончательный* результатъ 10-ю цѣлыми единицами.

При переходѣ отъ логариѳмовъ тригонометрическихъ линій къ логариѳмамъ чиселъ, и обратно, необходимо обращать вниманіе на эти дополняемые десятки.

Имѣя логариѳмы тригонометрическихъ линій, всегда можемъ по нимъ найти *натуральныя тригонометрическія величины*. Для этого должно только логариѳмъ тригонометрической линіи уменьшить 10-ю, и потомъ, въ таблицахъ логариѳмовъ чиселъ, данному логариѳму пріискать соотвѣтствующее число.

e) Съ увеличеніемъ угла отъ 0 до 90°, синусы, тангенсы и секансы увеличиваются, а косинусы, котангенсы и косекансы уменьшаются. Поэтому, если уголъ увеличивается на одну или нѣсколько секундъ, то по *пропорціональнымъ частямъ* можемъ отыскать, на какую величину долженъ соотвѣтственно измѣниться логариѳмъ этой тригонометрической линіи. Слѣдовательно, если *отыскиваемъ логариѳмъ тригонометрическихъ линій по данному углу въ градусахъ, минутахъ и секундахъ*, то при вычисленіи *синусовъ и тангенсовъ, полученное произведеніе придается къ ближайщему меньшему табличному логариѳму*; а при вычисленіи *косинусовъ и котангенсовъ полученное произведеніе* отнимается *отъ ближайшаго меньшаго табличнаго логариѳма*, потому что съ увеличеніемъ угла эти послѣднія тригонометрическія линіи (т. е. косинусъ и котангенсъ) уменьшаются

Соотвѣтственныя измѣненія логариѳмовъ на 1″ или на кратное число секундъ, для каждаго рада тригонометрическихъ линій, помѣщаются иногда въ особомъ столбцѣ, подъ буквами *P. P.* или Пр. ч. (т. е. partes proportionales, или пропорціональныя части табличныхъ разностей). Вообще же соотвѣтственная пропорціональная часть въ этомъ случаѣ находится черезъ умноженіе табличной разности одной секунды на данное число секундъ.

f) Рѣшая вопросъ обратный, т. е. *по данному логариѳму тригонометрической линіи отыскивая соотвѣтствующій уголъ*, не всегда находимъ въ таблицахъ весь данный логариѳмъ, а потому въ этомъ случаѣ и искомый уголъ съ точностію въ таблицахъ не находится. Для рѣшенія этого вопроса *въ синусахъ и тангенсахъ* берутъ *ближайшій ме́ньшій* логариѳмъ (а потому и ближайшій ме́ньшій уголъ), и потомъ, отыскавъ по табличной разности дополнительныя секунды, *придаютъ* къ отысканному углу.

При вычисленіи же *угла въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, по данному логариѳму косинуса и котангенса*, отыскиваютъ сперва *ближайшій большій логариѳмъ* (который соотвѣтствуетъ ближайшему ме́нь-

шему углу), и помощію табличной разности пріискавъ дополнительныя секунды, *придаютъ* ихъ къ отысканному углу. Объясненіе этого правила основано на томъ, что *большему косинусу, или котангенсу, соотвѣтствуетъ меньшій уголъ*.

g) Такъ какъ въ таблицахъ помѣщаются только тригонометрическія линіи *острыхъ* угловъ, къ тому же косинусы, тангенсы и котангенсы тупыхъ угловъ суть величины *отрицательныя*, которыя не могутъ имѣть *дѣйствительныхъ логариѳмовъ*, то для приложенія теоріи логариѳмовъ въ численнымъ рѣшеніямъ вообще, необходимо сперва полученную формулу преобразовать такъ, чтобы въ нее входили только тригонометрическія линіи острыхъ угловъ и потомъ уже приступать къ ея логариѳмованію.

Преобразованія эти, какъ мы уже видѣли (§ 5; 4), весьма легко могутъ быть произведены помощію извѣстныхъ формулъ:

$$\text{Sin}\ a = \text{Sin}\ (180^\circ - a); \quad \text{Cos}\ a = \text{Cos}\ (180^\circ - a);$$
$$\text{Tang}\ a = -\text{Tang}\ (180^\circ - a) \ \text{и} \ \text{Cotg}\ a = -\text{Cotg}\ (180^\circ - a).$$

h) Если при вычисленіи встрѣтятся такъ называемые *отрицательные углы*, то тригонометрическія линіи ихъ Sin $(-x)$, Cos $(-x)$, Tang $(-x)$ и Cotg $(-x)$ вводятся въ вычисленія помощію формулъ и преобразованій, изложенныхъ въ § 5; 3.

При вычисленіи логариѳмами произведеній изъ отрицательныхъ количествъ необходимо замѣтить, что *четное* число отрицательныхъ множителей даетъ въ результатѣ (+) *плюсъ*, а *не четное* даетъ (—) *минусъ*.

i) Нѣкоторыя изъ тригонометрическихъ линій даютъ общія разности (différences communes) на 1'' и на пропорціональныя части; какъ напримѣръ въ таблицѣ 3 (*) находимъ общія табличныя разности между Tang. и Cotg.; между Sin. и Cosec.; между Sec. и Cosin. того же угла. Причина этому слѣдующая: извѣстно что

$$\text{Tang}\ x = \frac{1}{\text{Cotg}\ x} \ \text{и} \ \text{Tang}\ (x+h) = \frac{1}{\text{Cotg}\ (x+h)}.$$

а потому $\text{Tang}\ x.\ \text{Cotg}\ x = 1$ и $\text{Tang}\ (x+h).\ \text{Cotg}\ (x+h) = 1$,

слѣдовательно $\text{Tang}\ x.\ \text{Cotg}\ x = \text{Tang}\ (x+h).\ \text{Cotg}\ (x+h)$.

Взявъ логариѳмы, получимъ

$$\log \text{Tang}\ x + \log \text{Cotg}\ x = \log \text{Tang}\ (x+h) + \log \text{Cotg}\ (x+h),$$

(*) Стереотипныя таблицы, составленныя для употребленія въ Морскомъ кадетскомъ корпусѣ, С. П. Б. 1860 и 1862 г. или логариѳмы Веги, изд. Бремикера, таб. III.

откуда наконецъ

$$\log \text{Tang}\,(x+h) - \log \text{Tang}\,x = \log \text{Cotg}\,x - \log \text{Cotg}\,(x+h).$$

Такимъ же образомъ для синуса и косеканса и т. д.

k) Способъ, вообще употребляемый для отысканія логариѳма тригонометрической величины угла, и обратно. не можетъ быть вполнѣ примѣненъ къ отысканію синуса или тангенса весьма малаго угла (наприм. угла менѣе одного градуса); иначе выводы будутъ весьма неточные.

Пріемы, по которымъ логариѳмы этихъ тригонометрическихъ линій получаются съ меньшею погрѣшностію, очевидны изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть, напримѣръ, при центрѣ O даны два малые угла AOB и AOC (черт. 13), въ которыхъ изъ точки O какъ центра, тѣмъ же радіусомъ, принятымъ за единицу, описаны дуги AB и AC, измѣряющія данные углы.

Проведя BD и CE перпендикулярно къ OA, получимъ, что BD есть $\text{Sin}\,AOB$ и $CE = \text{Sin}\,AOC$. Такъ какъ дуга ACB весьма близко подходитъ къ хордѣ AB, и почти сливается съ нею, то можно принять, что ΔABD подобенъ ΔACE, почему и получимъ пропорцію

$$BD : AB = CE : AC \text{ или } \text{Sin}\,AOB : AB = \text{Sin}\,AOC : AC.$$

Если положимъ, что уголъ AOB имѣетъ x'', то и $\smile AB = x''$; положивъ $\angle AOC = 1''$, получимъ, что и $\smile AC = 1''$.

Слѣдовательно, вмѣсто послѣдней пропорціи получимъ

$\text{Sin}\,x'' : x'' = \text{Sin}\,1'' : 1''$, откуда

$$\text{Sin}\,x'' = \frac{x''.\,\text{Sin}\,1''}{1''} = x''.\,\text{Sin}\,1'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a).$$

Въ формулѣ $\text{Tang}\,x = \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}$, при углѣ x *весьма маломъ*, знаменатель $\text{Cos}\,x$ становится *весьма близкимъ* къ единицѣ, по этому для малыхъ угловъ $\text{Tang}\,x = \text{Sin}\,x$, а слѣдовательно $\text{Tang}\,x'' = x''.\,\text{Sin}\,1''$. . . . . (b).

Изъ формулъ (a) и (b) получимъ

$$\left.\begin{aligned} \log \text{Sin}\;\; x'' &= \log x'' + \log \text{Sin}\,1'' \\ \log \text{Tang}\,x'' &= \log x'' + \log \text{Sin}\,1'' \end{aligned}\right\} (A)$$

$$\left.\begin{aligned} \log x'' &= \log \text{Sin}\;\; x'' - \log \text{Sin}\,1'' \\ \log x'' &= \log \text{Tang}\,x'' - \log \text{Sin}\,1'' \end{aligned}\right\} (B)$$

Формулы (A) служатъ для опредѣленія логариѳма синуса и тангенса весьма

малаго угла; а формулы (*B*) для рѣшенія вопроса обратнаго; эти же формулы служатъ для вычисленія логариѳма косинуса и котангенса угла весьма близкаго къ 90° (численные примѣры см. въ таблицахъ логариѳмовъ М. к. к. введен. стр. 14).

Если дуга не болѣе 1° 2′ 28″, то можно принять дугу за синусъ и наоборотъ, съ погрѣшностію не болѣе 0,000001. А когда дуга не больше 49′ 33″, то можно принять дугу за тангенсъ и наоборотъ, съ погрѣшностію не болѣе 0,000001. (См. таб. Hülsse, p. XII и Schrön, p. 11, § 67 и далѣе).

Для избѣжанія погрѣшностей, происходящихъ отъ вычисленія логариѳмовъ Sin. и Tang. малыхъ угловъ въ таблицахъ, нами принятыхъ, углы между 0° и 2° возрастаютъ черезъ 1″, а отъ 2° до 4°, черезъ каждые 15″.

Прибавленіе. Логариѳмическія вычисленія такихъ выраженій, къ которыхъ встрѣчаются отрицательныя величины.

Въ курсахъ начальныхъ основаній алгебры обыкновенно предлагаются способы логариѳмическихъ вычисленій: произведенія нѣсколькихъ чиселъ, частнаго, степени и корня, предполагая данныя числа положительными; если же нѣкоторыя изъ нихъ будутъ *отрицательными*, то относительно вычисленія подобныхъ выраженій, полезно замѣтить слѣдующее:

1) Произведеніе количествъ a и $-b$ равно $-ab$. Слѣдовательно, для примѣненія логариѳмовъ производить достаточно вычисленія надъ абсолютными величинами a и b, и передъ произведеніемъ поставить знакъ (—) *минусъ*.

2) Для отысканія частнаго $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ отыскиваютъ логариѳмъ этой дроби по формулѣ $\log a - \log b$, и передъ соотвѣтствующимъ числомъ ставить знакъ (—) *минусъ*.

3) Вычисленіе степеней отрицательныхъ чиселъ производится по формулѣ $(-a)^n = \pm (a^n)$, смотря по тому, будетъ *ли* n *четное* или *нечетное*. И здѣсь, отыскавъ логариѳмъ абсолютнаго числа a, ставятъ передъ степенью знакъ *плюсъ*, или *минусъ*, соображаясь съ изложеннымъ правиломъ.

4) Для вычисленія корня нечетной степени изъ отрицательнаго числа поступаютъ по формулѣ $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, т. е. берутъ логариѳмъ корня n-ой степени изъ абсолютнаго числа a, и передъ отысканнымъ логариѳмомъ ставятъ знакъ (—) *минусъ*.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа есть выраженіе само по себѣ *мнимое*, слѣдовательно къ такому вычисленію логариѳмы примѣнены быть не могутъ.

Примѣч. Во всѣхъ исчисленныхъ нами случаяхъ, при логариѳмахъ отрицательныхъ величинъ, для краткости будемъ ставить знакъ (n) (*) [negativ]; такъ что напримѣръ $\log a = 3{,}7311051\ (n)$ обозначаетъ, что число, соотвѣтствующее этому логариѳму, есть отрицательное, т. е $a = -5384$.

Поэтому, если слагаемъ два или вообще четное число логариѳмовъ со знакомъ (n), то въ суммѣ получится логариѳмъ положительнаго числа; при сложеніи же нечетнаго числа логариѳмовъ со знакомъ (n) получается и сумма со знакомъ (n), слѣдовательно принадлежитъ логариѳму отрицательнаго числа, потому что сложеніе логариѳмовъ соотвѣтствуетъ умноженію количествъ.

При вычитаніи логариѳмовъ будемъ отрицательные логариѳмы замѣнять ихъ *ариѳметическими дополненіями.*

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМѢРЫ.

Для упражненія рѣшимъ слѣдующія задачи.

Задача 1. $x = 419 \times \mathrm{Sin}^2 40°$. Чему $= x$?

Рѣш. $\log x = \log 419 \times 2 \log \mathrm{Sin}\ 40°$

$$\left.\begin{array}{r} \log 419 = \ \ 2{,}622214 \\ 2 \log \mathrm{Sin}\ 40° = 19{,}616135 \\ \hline \log x = \ \ 2{,}238349 \end{array}\right\} x = 173{,}12.$$

Задача 2. $\mathrm{Sin}\,x = \dfrac{-314 \times \mathrm{Sin}\ 30°}{-411 \times \mathrm{Cos}^2\ 15°}$. Чему $= x$?

Рѣш.

$$\begin{array}{r} \log 314 = 2{,}496930\ (n) \\ \log \mathrm{Sin}\ 30° = 9{,}698970 \\ \log' 411 = 7{,}386158\ (n) \\ 2 \log' \mathrm{Cos}\ 15° = 0{,}030112 \\ \hline \log \mathrm{Sin}\ x = 9{,}612160, \end{array} \quad x = 24°\ 10'\ 7''.$$

Задача 3. Вычислить помощію логариѳмовъ слѣдующее выраженіе:

$$x = \frac{\sqrt[3]{-147{,}32}\ (-6{,}298)^4}{\sqrt[7]{(-20\ \sqrt[3]{-0{,}057})}}.$$

Рѣш. Для удобства вычисленія преобразуемъ это выраженіе, и расположимъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

$$x = \frac{\sqrt[3]{-147{,}32}.\ (-6{,}298)^4}{\sqrt[7]{-20}.\ \sqrt[21]{-0{,}057}}.$$

(*) Знакъ этотъ предложенъ математикомъ Гаусомъ и принятъ многими новѣйшими астрономами. „Littera n logarithmo affixa indicat, numerum cui respondet negativum esse." (Gauss. Theoria motus corporum coelestium. T. 1, Sect., pag. 9).

См. Логариѳмы Веги, изд. Бремикеромъ, введеніе стр. стр. XXVIII.

$$\log \sqrt[5]{-147{,}32} = 0{,}433652\ (n)$$
$$\log (-6{,}298)^4 = 3{,}196811$$
$$\log' \sqrt[7]{-20} = 9{,}814139\ (n)$$
$$\log' \sqrt[21]{-0{,}057} = 10{,}059244\ (n)$$

$$\log x = 3{,}503846\ (n)$$
$$x = -3190{,}4.$$

Задача 4. $x = \dfrac{\text{Tang } (117^\circ\ 14')\ \text{Cos } (324^\circ\ 16')\ \text{Sin } (140^\circ\ 45')}{\text{Cos } (195^\circ\ 30')\ \text{Sin } (\ 22^\circ\ 13')\ \text{Sin } (200^\circ\ 50')}$.

Рѣш.
$$\log \text{Tang } (117^\circ\ 14') = 10{,}288475\ (n)$$
$$\log \text{Cos } (324^\circ\ 16') = 9{,}909419$$
$$\log \text{Sin } (140^\circ\ 45') = 9{,}801202$$
$$\log' \text{Cos } (195^\circ\ 30') = 0{,}016089\ (n)$$
$$\log' \text{Cos } (\ 22^\circ\ 13') = 0{,}422382\ (^*)$$
$$\log' \text{Sin } (200^\circ\ 50') = 0{,}448976\ (n)$$

$$\log x = 0{,}886543\ (n)$$
$$x = -\ 7{,}70092.$$

Задача 5. Вычислить уголъ x по формулѣ.

$$\text{Tang } x = -\sqrt{\frac{\text{Sin } 5^\circ\ 23'\ 24''\ \ \text{Sin } 66^\circ\ 51'\ \ 2''}{\text{Sin } 115^\circ\ 41'\ 44''.\ \text{Sin } 43^\circ\ 27'\ 18''}}.$$

Рѣш. $\log \text{Tang } x = 9{,}572069\ (n)$

$$x = 159^\circ\ 31'\ 44'',\ \text{или}\ 339^\circ\ 31'\ 44''.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЙ.

Задача 1. Найти величину дуги въ $40^\circ\ 25'\ 35''$, при радіусѣ 378.

2. При радіусѣ $^3/_8$ аршина опредѣлить величину тангенса дуги въ $17^\circ\ 29'\ 36''$.

3. Радіусъ даннаго круга равенъ 1000 фут.; по формуламъ: Tang x = 2,9 8889 и Tang y = 2246,0368 (n) опредѣлить углы x и y.

4. Во сколько разъ Cotg. 2° и Sec. 2° болѣе радіуса?

5. Найти отношеніе Tang., Cos. и Sin. 150° къ радіусу.

6. Видна часть маховаго колеса нѣкоторой машины; дугѣ въ $79^\circ\ 37'\ 25''$ соотвѣтствуетъ синусъ въ $2^1/_4$ аршина. Какъ великъ радіусъ этого колеса.

7. Опредѣлить дуги по формуламъ: *Arc.* Sin $^1/_2$, 2 *Arc.* Sin ($\pm$ 1), *Arc.* Cos [illegible], *Arc.* Cotg $\sqrt{\frac{7}{4\pi}}$, 2 *Arc.* Tang $\sqrt{\frac{7}{4\pi}}$.

(*) Черезъ log′ будемъ обозначать *ариѳметическое дополненіе логариѳма.*

ГЛАВА II.

Вычисленіе треугольниковъ.

(ТРИГОНОМЕТРІЯ).

§ 9.

Графическіе способы для рѣшенія треугольниковъ; инструменты для того употребляемые; масштабъ линейный, транспортиръ, масштабъ хордовой и масштабы тригонометрическихъ линій, недостаточность графическихъ способовъ для точныхъ рѣшеній.

Въ геометріи предложены уже были способы для графическаго рѣшенія треугольниковъ помощію *линейнаго масштаба* и *транспортира*; подобные же пріемы могутъ быть употребляемы въ графической тригонометріи, и въ *особенности въ тѣхъ случаяхъ, если при рѣшеніи треугольниковъ не требуется* большой точности.

Кромѣ линейнаго масштаба и транспортира, описаніе и употребленіе которыхъ помѣщены въ курсахъ геометріи, для большей точности при нанесеніи и измѣреніи угловъ, а также для соотвѣтственности съ рѣшеніями чисто тригонометрическими, при графическихъ рѣшеніяхъ треугольниковъ употребляются еще *хордовой масштабъ* и *масштабы тригонометрическихъ линій*. Оба послѣдніе инструмента, какъ и транспортиръ, употребляются для двухъ цѣлей:

1-ое. Для составленія угловъ по данному числу градусовъ и минутъ, и

2-ое. Обратно, для опредѣленія сколько градусовъ и минутъ въ данномъ углѣ, т. е. для измѣренія даннаго угла.

1) Хордовой масштабъ дугъ меньшихъ 90° строится слѣдующимъ образомъ:

Произвольнымъ радіусомъ *CA* описавъ полуокружность *ADB* (черт. 14), и раздѣливъ ее на 180 равныхъ частей, получимъ, что каждая часть будетъ соотвѣтствовать 1 градусу. (На чертежѣ, по причинѣ малости фигуры, дѣлимъ полуокружность только на 18 равныхъ частей, такъ что каждая часть будетъ обозначать 10 градусовъ).

Проведя хорду *BD*, соотвѣтствующую дугѣ въ 90°, примемъ ее за *масштабъ хордъ* (черт. 14).

Точку *B*, обозначающую 0° принявъ за центръ, а за радіусы, начиная отъ *B*, взявъ хорды дугъ въ 10°, 20°, 30° и т. д. по порядку до 90°, отложимъ ихъ на хордѣ *BD*, то получимъ, что на хордовомъ масшабѣ имъ соотвѣтствуютъ хорды *B*-10, *B*-20, *B*-30 . . . *B*-60 и т д., гдѣ *B* означаетъ начало масштаба, а 10, 20 и т. д. обозначаютъ число градусовъ соотвѣтствующей дуги.

Чтобы данный уголъ измѣрить помощію хордоваго масштаба, должно, принявъ вершину угла за центръ, а снявъ съ масштаба хорду въ 60°, какъ радіусомъ, описать дугу, которая заключалась бы между сторонами даннаго угла.

Хорду, соотвѣтствующую этой дугѣ, положивъ на хордовой масштабъ, начиная отъ точки *B*, получимъ число градусовъ даннаго угла, смотря по тому, между какими дѣленіями падетъ вторая точка

Точно такимъ же образомъ, чтобы построить уголъ даннаго числа градусовъ, берутъ вершину требуемаго угла за центръ и сперва описываютъ дугу радіусомъ по масштабу равнымъ хордѣ дуги 60°. Снявъ съ масштаба хорду даннаго числа градусовъ, отлагаютъ ее на этой окружности отъ точки пересѣченія дуги со стороною даннаго угла Соединивъ оторой конецъ отложенной хорды съ центромъ окружности, получимъ требуемый уголъ.

2) Масштабъ синусовъ и косинусовъ. Раздѣливъ четверть окружности *AD* на 9 равныхъ частей, получимъ, что каждая часть обозначаетъ дугу въ 10° (черт 14). Изъ каждой точки дѣленія на горизонтальный радіусъ *AC* опустивъ перпендикуляры, и при основаніяхъ этихъ перпендикуляровъ вверху линіи *AC* ставя послѣдовательно число градусовъ дополнительное до 90°, относительно той точки, отъ которой перпендикуляръ опущенъ; а внизу, у радіуса, число градусовъ, соотвѣтствующее той же точки дѣленія окружности, получимъ, на линіи *AC*, считая отъ *C*, *вверху масштабъ синусовъ*, а *внизу — масштабъ косинусовъ*.

И дѣйствительно, подъ чертою находимъ, что *C*-30 есть косинусъ дуги въ 30°, а число 60, стоящее у той же точки надъ чертою, показываетъ, что та же линія есть въ тоже время и синусъ дуги въ 60°.

3) Масштабъ тангенсовъ и секансовъ. Изъ крайней точки B, радіуса CB, проведя касательную BE, построимъ на ней масштабъ тангенсовъ (черт. **14**). Соединяя центръ C съ каждою изъ точекъ дѣленія дуги BD и продолжая радіусы до пересѣченія съ касательною, въ точкахъ пересѣченія ставимъ на ней числа 10, 20, 30 и т. д., соотвѣтствующія величинѣ дуги въ градусахъ. Считая по касательной BE, отъ точки B, получимъ, что B-10, B-20, B-30 и т. д. составляютъ требуемый *масштабъ*.

Прямыя же линіи C-10, C-20, C-30 и т. д , идущія отъ центра C до точекъ пересѣченія съ масштабомъ тангенсовъ, очевидно покажутъ длину секансовъ того же круга; поэтому, перенеся ихъ на прямую CF, и считая отъ точки C, получимъ *масштабъ секансовъ*.

Масштабы эти, или *шкалы*, называются *плоскими* или *простыми шкалами* въ отличіе отъ *Гонтеровой шкалы*, на которой, кромѣ того, показаны и *масштабы логариѳмовъ тригонометрическихъ линій* (см. о тригонометрическихъ шкалахъ М. Божерянова С. П. Б. 1828; Régle à calcul par Benoit или par L. Lalanne; а также Rechenschieber; slidingrule)

4) Общее примѣчаніе. Всѣ показанные нами масштабы тригонометрическихъ линій и хордовые служатъ для построенія угловъ по данному числу градусовъ и минутъ, а также для измѣренія данныхъ угловъ, и потому замѣняютъ транспортиръ, и могутъ быть употребляемы при рѣшеніи треугольниковъ помощію построенія. Но какъ для болѣе точнаго рѣшенія надо имѣть масштабы весьма большихъ размѣровъ, что весьма неудобно, кромѣ того вѣрность составленія масштабовъ и черченія по нимъ угловъ и сторонъ треугольника зависитъ и отъ вѣрности инструментовъ, и отъ искуства черченія, то графическіе способы рѣшенія треугольниковъ употребляются только тогда, когда въ рѣшеніи не требуется большой точности, а довольствуются приблизительными показаніями величины угловъ и сторонъ данной фигуры.

При этомъ понятно, что чѣмъ больше и отчетливѣе сдѣланъ масштабъ для измѣренія дугъ, тѣмъ съ большею точностію можно по немъ производить измѣреніе и построеніе угловъ (*).

При построеніи угла бо́льшаго 90° строятъ сперва уголъ равный его дополненію до 180°, т. е. острый, и потомъ уже, продолживъ одну изъ сторонъ этого угла за вершину, получаютъ требуемый тупой уголъ.

(*) Недостаточность графическихъ способовъ для рѣшенія треугольниковъ очевидна: даже помощію наилучшихъ транспортировъ и хордовыхъ масштабовъ невозможно съ точностію обозначать углы, заключающіе въ себѣ секунды. Принимая по масштабу сажень за 1/10 дюйма, и точнѣйшіе линейные масштабы не могутъ выразить на бумагѣ съ точностію тѣ линіи, которыя имѣютъ длиною десять тысячъ саженъ, т. е. свыше 20 верстъ. Скорость отысканія приблизительныхъ выводовъ есть единственное преимущество чертежныхъ рѣшеній.

5) Вычисленіе треугольниковъ по масштабамъ.

Для примѣненія чертежныхъ пріемовъ рѣшимъ слѣдующую задачу: ***Найти разстояніе между двумя предметами А и В*** (черт. 9, № 1), ***изъ которыхъ только къ одному изъ нихъ В подойти возможно, другой же А неприступенъ; положимъ, что онъ находится по другой сторонѣ рѣки.***

Рѣшеніе. Взявъ произвольную точку C такъ, чтобы изъ нея видимы были точки A и B, проводимъ прямую BC. Соединивъ точку A съ точками B и C, получимъ треугольникъ ABC.

Измѣряемъ прямую BC и углы B и C; пусть по измѣреніи $BC = 735$ саж., $\angle B = 50°$, $\angle C = 60°$.

Проведя на бумагѣ неопредѣленную прямую, по масштабу отложу на ней $bc = 735$ частямъ; помощію угломѣрныхъ инструментовъ нанося углы $abc = ABC$ и $bca = BCA$, получимъ Δabc, который будетъ подобенъ ΔABC. Снявъ ba, и положивъ на масштабъ, найдемъ, что сколько въ сторонѣ ba находится частей по масштабу, столько саженъ будетъ въ сторонѣ AB

[Рѣшимъ еще подобный же примѣръ. Пусть требуется дать понятіе о возможности *приблизительно* опредѣлять разстояніе между землею и луною.

Беремъ на поверхности земли двѣ точки B и C (черт. 9, № 1), разстояніе между которыми $BC = a$, съ точностію опредѣлено напр. въ миляхъ; A есть луна, которая видна изъ точекъ B и C по направленіямъ BA и CA. Если изъ B направить одну зрительную трубу на C, а другую на A, то найдется уголъ ABC, который и выразимъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, такимъ же образомъ найдемъ и уголъ BCA. Начертивъ прямую bc, которая имѣла бы по масштабу столько произвольныхъ долей, напр. дюймовъ, сколько въ BC миль и съ возможною точностію построивъ $\angle abc = \angle ABC$ и $\angle acb = \angle ACB$, получимъ, что ΔABC подобенъ Δabc, слѣдовательно $AB : ab = BC \quad bc$ т. е. AB должна заключать въ себѣ столько же миль, сколько въ ab дюймовъ. Измѣривъ сторону ab, узнаемъ приблизительно разстояніе отъ луны до точки B, на земной поверхности.

Здѣсь показали мы только возможность рѣшенія подобныхъ задачъ; но для краткости мы принуждены были ввести многія упрощенія, которыя на самомъ дѣлѣ не существуютъ.

Такъ напр. мы приняли BC за прямую, тогда какъ въ сущности она есть дуга большаго круга шара; далѣе мы допустили, что изъ одного мѣста можно видѣть другое, но и это при значительномъ разстояніи мѣстъ невозможно, а потому должно употреблять другіе способы и другіе, болѣе точные пріемы, предлагаемые наукою.

Зная разстояніе между луною и землею, постараемся опредѣлить гораздо большее разстояніе, а именно разстояніе солнца отъ земли.

Извѣстно, что при обѣихъ фазахъ луны, которыя называются первою и послѣднею четвертью, солнце, луна и земля лежатъ въ вершинахъ прямоугольнаго треугольника, прямой уголъ котораго находится въ лунѣ. Пусть черт. 9, № 2 представляетъ собою такое положеніе этихъ трехъ небесныхъ тѣлъ: S означаетъ солнце, E — землю и M — луну. Изъ E направимъ одну зрительную трубу въ M, а другую въ S, и измѣримъ уголъ MES, образуемый двумя зрительными трубами.

Разстояніе луны отъ земли, которое мы могли вывести изъ предыдущаго рѣшенія, равняется почти 50000 нѣмецк. миль. Проведемъ прямую em, длиною напр. въ 50 линій, такъ что всякая линія соотвѣтотвуетъ тысячѣ миль, и проведя $ms \perp me$, при точкѣ e построимъ $\angle mes = \angle MES$. Полученный треугольникъ mes будетъ подобенъ треугольнику MES, и сторона перваго es будетъ заключать въ себѣ столько же линій, сколько въ ES тысячъ миль. Но если бы все сказанное здѣсь, по масштабу изобразить на бумагѣ, то чертежъ (9, № 2) не могъ бы помѣститься ни на какомъ листѣ бумаги.

Солнце въ самомъ дѣлѣ отстоитъ отъ земли почти на 20 милліоновъ миль, поэтому сторона es по чертежу должна быть длиною въ 20000 линій, или слиш комъ въ 23 сажени. И такъ масштабъ, нами принятый, для чертежа слишкомъ великъ, а потому пусть одна линія соотвѣтствуетъ милліону миль, тогда me будетъ равна двадцатой части линіи, а es будетъ содержать въ себѣ 20 линій, что и дастъ для искомаго разстоянія между солнцемъ и землею двадцать милліоновъ миль. (*) Но построеніе прямой $me = {}^1/_{20}$ линіи по масштабу невозможно. Отсюда видимъ что, какъ въ разбираемомъ нами случаѣ, такъ и въ большей части другихъ астрономическихъ вопросовъ, рѣшеніе и вычисленіе треугольниковъ по масштабамъ не можетъ имѣть никакого примѣненія].

Относя къ геометріи болѣе подробное изложеніе приблизительныхъ графическихъ рѣшеній, займемся *рѣшеніемъ треугольниковъ помощію вычисленій*, что и составляетъ главную цѣль тригонометріи. При этомъ присовокупимъ, что въ тригонометріи треугольникъ вычисляется по тѣмъ же заданіямъ, по которымъ въ геометріи находимъ возможнымъ рѣшить его чертежемъ.

Такъ какъ рѣшеніе треугольника вычисленіемъ дѣлается возможнымъ только помощію отношеній, существующихъ между сторонами и углами этого треугольника, то и разсмотримъ сперва главнѣйшія изъ этихъ отношеній.

(*) Двѣ послѣднія задачи для курса необязательны; мы заимствовали ихъ изъ Littrow's „Populäre Geometrie".

При рѣшеніи треугольниковъ могутъ быть два главныхъ случая:

1) Если данный для рѣшенія треугольникъ есть *прямоугольный*, и

2) Если данный треугольникъ есть *косвенноугольный*.

Въ обоихъ случаяхъ мы будемъ обозначать углы буквами A, B, C, и стороны соотвѣтственно, по угламъ имъ противолежащимъ черезъ a, b, c; притомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ прямой уголъ будемъ обозначать буквою A, а гипотенузу черезъ a.

§ 10.

Основныя теоремы для вычисленія прямоугольныхъ треугольниковъ.

Теорема 1.

Во всякомъ плоскомъ прямоугольномъ треугольникѣ синусъ одного изъ острыхъ угловъ равенъ сторонѣ противолежащей этому углу, раздѣленной на гипотенузу, т. е. $\text{Sin}\, B = \frac{b}{a}$ (черт. 15).

Доказательство. Вершину B угла ABC, входящаго въ уравненіе, принявъ за центръ, радіусомъ принятымъ за единицу опишу дугу, которая стороны даннаго треугольника, или продолженіе ихъ, пересѣчетъ въ точкахъ D, E. Изъ точки D на сторону AB опустивъ перпендикуляръ DF, получимъ, что $DF = \text{Sin}\, B$; $BF = \text{Cos}\, B$; притомъ ΔDBF подобенъ ΔCBA, слѣдовательно $DF : BD = CA : BC$, или $\text{Sin}\, B \cdot 1 = b : a$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{откуда } \text{Sin}\, B = \frac{b}{a}, \text{ или } b = a\,\text{Sin}\, B; \\ \text{такимъ же образомъ выводимъ, что } c = a\,\text{Sin}\, C,\end{array}\right\} \quad (1)$$

т. е. *каждая изъ сторонъ прямаго угла прямоугольнаго треугольника равна гипотенузѣ, помноженной на синусъ угла противолежащаго этой сторонѣ*.

Теорема 2.

Во всякомъ плоскомъ прямоугольномъ треугольникѣ косинусъ одного изъ острыхъ угловъ равенъ сторонѣ, ему прилежащей, дѣленной на гипотенузу.

Доказательство. Изъ подобія треугольниковъ DBF и CBA (черт. 15) получаемъ $BF : BD = BA : BC$,

$$\left.\begin{array}{r} \text{или } \operatorname{Cos} B : 1 = c : a, \text{ слѣдовательно } \operatorname{Cos} B = \frac{c}{a}, \\ \text{откуда } c = a . \operatorname{Cos} B; \\ \text{такимъ же образомъ выводимъ, что } b = a . \operatorname{Cos} C, \end{array}\right\} \quad (2)$$

т. е. *каждая изъ сторонъ прямаго угла прямоугольнаго треугольника равна гипотенузѣ, помноженной на косинусъ угла, прилежащаго этой сторонѣ.*

Теорема 3.

Во всякомъ плоскомъ прямоугольномъ треугольникѣ тангенсъ одного изъ острыхъ угловъ равенъ сторонѣ противолежащей этому углу, дѣленной на сторону ему прилежащую.

Доказательство. Изъ точки E на прямую AB возставивъ перпендикуляръ EG, получимъ ΔBEG подобный ΔBAC (черт. 15), слѣдовательно $EG : BE = AC : BA$, или подставивъ вмѣсто равныхъ равныя,

$$\operatorname{Tang} B : 1 = b : c, \text{ откуда } \operatorname{Tang} B = \frac{b}{c}.$$

Изъ этой же формулы получимъ, что $b = c . \operatorname{Tang} B$ (**3**), т. е. *каждая изъ сторонъ прямаго угла прямоугольнаго треугольника равна другой сторонѣ того же треугольника помноженной на тангенсъ угла, противолежащаго первой сторонѣ.* (Сравнить съ § 4; 4).

Примѣч. 1. Вслѣдствіе предложенныхъ нами опредѣленій тригонометрическихъ величинъ (§ 4, ст. 4) теоремы 1, 2 и 3 могутъ быть приняты безъ доказательствъ.

Примѣч. 2. Къ числу основныхъ теоремъ для рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ должны быть присоединены кромѣ того

а) Теорема Пиѳагора, доказанная въ геометріи, т. е. что *квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ прочихъ сторонъ*, или

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ откуда } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c)(a - c)};$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}.$$

b) *Во всякомъ треугольникѣ сумма угловъ равна двумъ прямымъ*, а потому *сумма двухъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равна d*, т. е.

$$B + C = 90°.$$

Прибавленіе. Предлагаемъ здѣсь нѣкоторыя изъ формулъ, помощію которыхъ иногда могутъ быть упрощаемы рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ, или могутъ быть вычисляемы треугольники въ тѣхъ случаяхъ, когда въ заданія входятъ суммы и разности двухъ сторонъ.

Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ:

1) $b + c = a \operatorname{Cos} \frac{B - C}{2} \sqrt{2} = a. \operatorname{Cos} (45^\circ - C) \sqrt{2};$ . . . . (α)

$b - c = a \operatorname{Sin} \frac{B - C}{2} \sqrt{2} = a \operatorname{Sin} (45^\circ - C) \sqrt{2}.$ . . . . (β)

Доказательство. Уже выведено было (§ 10; теор. 2)

что $b = a. \operatorname{Cos} C$

$c = a. \operatorname{Cos} B$, откуда (по § 7; форм. 21)

$b + c = a. (\operatorname{Cos} C + \operatorname{Cos} B) = a. 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (B + C). \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (B - C);$

но какъ $B + C = 90^\circ$, то $\frac{1}{2} (B + C) = 45^\circ$,

а $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (B + C) = \operatorname{Cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (§ 8),

слѣдовательно $b + c = a. 2 \operatorname{Cos} \frac{B - C}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a. \operatorname{Cos} \frac{B - C}{2} \sqrt{2}.$

Притомъ, если $B = 90^\circ - C$, то

$B - C = 90^\circ - 2 C$, или $\frac{1}{2} (B - C) = 45^\circ - C$,

слѣдовательно $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (B - C) = \operatorname{Cos} (45^\circ - C)$, а потому

$b + c = a. \operatorname{Cos} (45^\circ - C) \sqrt{2}$. . . . . (α).

Точно такимъ же образомъ доказывается и слѣдующая формула т. е. что

$b - c = a. \operatorname{Sin} \frac{B - C}{2} \sqrt{2} = a \operatorname{Sin} (45^\circ - C) \sqrt{2}$. . . . . ($\beta$).

Раздѣливъ (β) на (α), получимъ

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{a \operatorname{Sin} \frac{1}{2} (B - C) \sqrt{2}}{a \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (B - C) \sqrt{2}} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (B - C).$$

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{a \operatorname{Sin} (45^\circ - C) \sqrt{2}}{a \operatorname{Cos} (45^\circ - C) \sqrt{2}} = \operatorname{Tang} (45^\circ - C), \text{ т. е.}$$

$$\frac{b - c}{b + c} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (B - C) = \operatorname{Tang} (45^\circ - C). \quad . . . . (\gamma).$$

Помощію первыхъ двухъ уравненій (α) и (β) рѣшается тотъ случай прямоугольныхъ треугольниковъ, когда *по гипотенузѣ и суммѣ или разности сторонъ надо отыскать одинъ изъ острыхъ угловъ.*

По формулѣ же (γ) рѣшается треугольникъ *по данному острому углу и суммѣ или разности катетовъ;* для рѣшенія этой же задачи могутъ быть употреблены формулы (α) и (β).

2) $\frac{b}{a + c} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} B$ . . . (δ), и $\frac{c}{b + a} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} C$ . . . . (δ')

Доказательство. $c : a = \operatorname{Cos} B : 1$,

откуда $c + a : a = \operatorname{Cos} B + 1 : 1;$

[redacted] $b : a = \operatorname{Sin} B : 1$, слѣдовательно

$b : a + c = \operatorname{Sin} B : 1 + \operatorname{Cos} B$

или $\frac{\operatorname{Sin} B}{1 + \operatorname{Cos} B} = \frac{b}{a + c}$; но $\frac{\operatorname{Sin} B}{1 + \operatorname{Cos} B} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} B$ (§ 7, зад. 6),

слѣдовательно $\text{Tang}\,\frac{1}{2}B = \frac{b}{a+c}$ . . . . (δ).

Такимъ же образомъ доказывается и формула . . . . (δ').

3) $\frac{a-c}{b} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}B$ . . (ε), $\frac{a-b}{c} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}C$ . . . . . (ε').

Доказательство. $a : c = 1 : \text{Cos}\,B$, слѣд. $a - c : a = 1 - \text{Cos}\,B : 1$

но и $b : a = \text{Sin}\,B : 1$

откуда $a - c : b = 1 - \text{Cos}\,B : \text{Sin}\,B$,

слѣдовательно $\frac{a-c}{b} = \frac{1 - \text{Cos}\,B}{\text{Sin}\,B} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}B$. (§ 7, зад. 6).

Такимъ же образомъ доказывается и формула (ε').

Примѣч. Помощію уравненій (δ, δ') и (ε, ε') рѣшаются тѣ случаи прямоугольныхъ треугольниковъ, когда данъ *одинъ изъ угловъ и сумма или разность гипотенузы и катета.*

4) $\sqrt{\frac{a-c}{2a}} = \text{Sin}\,\frac{1}{2}B$ . . . . . (ζ)

$\sqrt{\frac{a+c}{2a}} = \text{Cos}\,\frac{1}{2}B$. (ζ')

$\sqrt{\frac{a-c}{a+c}} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}B$ . . . . . (μ)

Доказательство. Изъ пропорціи $a : c = 1 : \text{Cos}\,B$

получимъ $a \mp c : a = 1 \mp \text{Cos}\,B : 1$

или $a \mp c : 2a = 1 \mp \text{Cos}\,B : 2$,

откуда $\sqrt{\frac{a-c}{2a}} = \sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,B}{2}} = \text{Sin}\,\frac{1}{2}B$ . . (ζ)

также $\sqrt{\frac{a+c}{2a}} = \sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,B}{2}} = \text{Cos}\,\frac{1}{2}B$ . . . (ζ') (§ 7, зад. 6).

Раздѣливъ (ζ) на (ζ'), получимъ

$\sqrt{\frac{a-c}{a+c}} = \text{Tang}\,\frac{1}{2}B$ . . . (μ), или $\text{Tang}^2\,\frac{1}{2}B = \frac{a-c}{a+c}$.

§ 11.

Вычисленіе прямоугольныхъ треугольниковъ.

Число возможныхъ случаевъ. При вычисленіи прямоугольныхъ треугольниковъ вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы *по двумъ изъ пяти величинъ отыскать остальныя три.*

Но какъ *пять* количествъ, будучи соединены *по два*, или *по три*, даютъ только $\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ различныхъ соединеній, то понятно, что пред-

ложенный нами общій вопросъ не можетъ заключать въ себѣ болѣе 10 различныхъ случаевъ. При подробномъ же изслѣдованіи окажется, что совершенно различныхъ случаевъ въ вопросѣ этомъ можетъ быть только *четыре*.

И дѣйствительно, исключивъ тотъ случай когда даны *два угла*, (потому что при этомъ заданіи безчисленное множество треугольниковъ удовлетворяютъ требованію, и задача остается *неопредѣленною*), при остальныхъ заданіяхъ прямоугольныхъ треугольниковъ получимъ только два сочетанія: *a) сторона и уголъ* и *b) двѣ стороны* (*).

Въ первомъ изъ этихъ случаевъ, (*a*) данная сторона можетъ быть *гипотенуза;* поэтому получаемъ слѣдующія *два соединенія:*

a, B , a, C . . . . (1 .

Если данная сторона есть *катетъ*, то получимъ *четыре соединенія:*

b, B | b, C c, B | c, C . . (2),

слѣдовательно здѣсь два случая:
катетъ и уголъ ему противолежащій и *катетъ и уголъ ему прилежащій*.

Во второмъ случаѣ (*b*):

Одна изъ сторонъ можетъ быть *гипотенуза*, а другая *катетъ*, откуда *два соединенія:*

a, b | a, c . . . . (3).

Наконецъ, могутъ быть даны *два катета*, что даетъ только *одно соединеніе*

b, c . . . . (4).

На каждый изъ этихъ случаевъ предлагаемъ здѣсь отдѣльныя задачи и провила для ихъ рѣшеній.

Задача 1.

Вычислить треугольникъ по данной гипотенузѣ a и по одному изъ острыхъ угловъ B.

Рѣшеніе. Должно отыскать чему равны C, b, c (черт. 16).

Очевидно, что $C = 90° - B$.

(*) *Сторонами* прямоугольнаго треугольника мы будемъ называть только тѣ, которыя прилежатъ прямому углу.

Отысканіе стороны b.

По 1-й теор. § 10 имѣли $\text{Sin}\ B = \frac{b}{a}$,

откуда $b = a\,.\,\text{Sin}\ B$,

слѣд. $\log b = \log a + \log \text{Sin}\ B - 10$.

Отысканіе стороны c.

По теор. 2, § 10, $\text{Cos}\ B = \frac{c}{a}$,

откуда $c = a\,.\,\text{Cos}\ B$,

слѣд. $\log c = \log a + \log \text{Cos}\ B - 10$.

Численный примѣръ.

Дано. $a = 425$, $B = 36°\ 12'$; чему = прочія части?

$\angle\ C = 90° - 36°\ 12' = 53°\ 48'$

Вычисленіе стороны b

Вычисленіе стороны c.

(Безъ помощи логариѳмовъ (*))

$b = a\,.\,\text{Sin}\ B = 425 \times 0{,}590605 = 251{,}0073\ldots$

$c = a\ \text{Cos}\ B = 425 \times 0{,}806960 = 342{,}958\ldots$

Вычисленіе той же задачи помощію логариѳмовъ.

$\log a = 2{,}628389$

$\log \text{Sin}\ B = 9{,}771298 - 10$

$\log b = 2{,}399687$

$b = 251{,}0073\ldots$

$\log a = 2{,}628389$

$\log \text{Cos}\ B = 9{,}906852 - 10$

$\log c = 2{,}535241$

$c = 342{,}958\ldots$

Второй примѣръ.

Пусть $a = 232{,}35$ и $B = 34°\ 14'\ 32''$.

Рѣш $C = 90° - B = 55°\ 45'\ 28''$.

(*) См. таблицу натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ, на концѣ этой книги, прибавл. Табл. I. Довольствуясь только десятыми и сотыми долями таблицъ, получимъ, что $b < 425 \times 0{,}6 = 255$;

$c < 425 \times 0{,}81 = 344{,}25$.

Вычисленіе стороны b.

$\log c = \log 232,35 + \log \mathrm{Sin}\, 34°14'32''$;

но $\log 232,35 = 2,366143$

$\log \mathrm{Sin}\, 34°\, 14'\, 32'' = 9,750271$

$\log b = 2,116414$

$b = 130,74$

Вычисленіе стороны c.

$\log c = \log 232,35 + \log \mathrm{Cos}\, 34°14'32''$,

$\log 232,35 = 2,366143$

$\log \mathrm{Cos}\, 34°\, 14'\, 32'' = 9,917330$

$\log c = 2,283473$

$c = 192,07$

Примѣч. Задача эта весьма часто встрѣчается въ практическихъ приложеніяхъ тригонометріи, а именно

a) Въ архитектурѣ, въ горномъ и инженерномъ дѣлѣ при вычисленіи, въ извѣстныхъ случаяхъ, длины балокъ и стоекъ, а также перпендикулярныхъ углубленій и высотъ по данному откосу.

b) Въ навигаціи, при плоскомъ счисленіи курса корабля.

Примѣры для упражненій.

Данныя.		Искомыя.		
b	B	C	b	c
298,74	60° 15′ 22″	29° 44′ 38″	259,38	148,22
56саж.5ф.1,4д	35° 17′ 42″,2	54° 42′ 17″,8	32с.5ф.3,4д	46с.2ф.1,4д.
0,05	53° 7′ 49″	36° 52′ 11″	0,04	0,03

Задача. Откосъ для насыпи, прямою линіею идущій въ гору, составляетъ съ горизонтомъ уголъ въ 28° 46′, какъ велика высота откоса, если длина его по покатости составляетъ 286 саж., и какъ велика линія, служащая проекціею этого откоса?

Задача 2.

Вычислить прямоугольный треугольникъ по сторонѣ c около прямаго угла и по одному изъ острыхъ угловъ B?

Рѣшеніе. Остальной острый уголъ $C = 90° - B$.

Отысканіе гипотенузы a.

По теоремѣ 2, § 10, получимъ

$\mathrm{Cos}\, B = \frac{c}{a}$, откуда $a = \frac{c}{\mathrm{Cos}\, B}$.

слѣд. $\log a = \log c - (\log \mathrm{Cos}\, B - 10)$

$\log a = \log c + 10 - \log \mathrm{Cos}\, B$

$\log a = \log c +$ ар. доп. $\log \mathrm{Cos}\, B$ (*)

или короче $\log a = \log c + \log' \mathrm{Cos}\, B$.

Отысканіе стороны b.

Для вычисленія другаго катета b имѣемъ $\mathrm{Tang}\, B = \frac{b}{c}$ (теор. 3, § 10), откуда $b = c.\ \mathrm{Tang}\, B$, слѣд.

$\log b = \log c + \log \mathrm{Tang}\, B$.

(*) *Ар. доп.* означаетъ ариѳметическое дополненіе логариѳма числа или тригонометрической линіи, которое мы для краткости будемъ обозначать log′, т. е. будемъ ставить знакъ надъ логариѳмомъ того числа, котораго требуется взять ариѳметическое дополненіе. (См. алг. гг. Сомова, А. Давидова и К. Краевича).

Численные примѣры.

Дано. $c = 342{,}958$, $B = 36° 12'$. Чему = проч. части?

Вычисленіе безъ логариѳмовъ.

$$C = 90° - B = 53° 48'.$$

$$a = \frac{c}{\text{Cos}\,B} = \frac{342{,}958}{0{,}806960} = 425\ (*).\quad b = c\,.\,\text{Tg}\,B = 342{,}958 \times 0{,}731891 = 251{,}007$$

Вычисленіе помощію логариѳмовъ.

$\log c = 2{,}533241$	$\log c = 2{,}533241$
$\log' \text{Cos}\,B = 0{,}093148$	$\log \text{Tg}\,B = 9{,}864445 - 10$
$\log a = 2{,}628389$	$\log b = 2{,}399686$
$a = 425$	$b = 251{,}0073$

Предлагаемъ еще численный примѣръ.

Пусть $c = 2982{,}7$; $B = 54° 32' 20''$
то $C = 90° - 54° 32' 20'' = 35° 27' 40''$.

Вычисленіе гипотенузы a.	***Вычисленіе стороны b.***
$\log a = \log 2982{,}7 + \log \text{Cos}\,54°32'20''$.	$\log b = \log 2982{,}7 + \log \text{Tg}.\,54°32'20''$
но $\log 2982{,}7 = 3{,}474610$	$\log 2982{,}7 = 3{,}474610$
$\log' \text{Cos}\,54°32'20'' = 0{,}236459$	$\log \text{Tg}\,54°32'20'' = 10{,}147356 - 10$
$\log a = 3{,}711069$	$\log b = 3{,}621966$
слѣд. $a = 5141{,}25$	слѣд. $b = 4187{,}6$

Примѣч 1. Помощію этой задачи можно опредѣлять высоту горы, башни, дерева и вообще всякаго вертикально стоящаго предмета.

Примѣч. 2. Если даны *сторона около прямаго угла и уголъ ей противолежащій B*, то прежде опредѣляютъ остальной острый уголъ по формулѣ $C = 90° - B$. Вычисленіе гипотенузы a и стороны c производится по слѣдующимъ формуламъ

$\text{Sin}\,B = \frac{b}{a}$ (теор. 1, § 10), откуда $a = \frac{b}{\text{Sin}\,B}$, слѣд. $\log a = \log b + \log' \text{Sin}\,B$.

$\text{Tang}\,B = \frac{b}{c}$ (теор. 3, § 10), откуда $c = \frac{b}{\text{Tang}\,B}$, слѣд. $\log c = \log b + \log' \text{Tang}\,B$.

(*) Вычисляя приблизительно, получимъ.
$a = 343 : 0{,}81 = 423{,}5$, $b = 343 \times 0{,}73 = 250{,}4$.

Примѣры для упражненій.

Данныя.		Искомыя.		
b	C	B	c	a
259,38	12° 1′ 11″	77° 58′ 49″	55,23	265,20
2 вер 126 саж.	61° 12′	28° 48′	4 вер. 48 с.	4 вер. 337 с.
3252853	43° 2′ 5″	46° 57′ 55″	3037005,6	4450207,1.

(Послѣдній примѣръ вычисленъ по таблицамъ Каллета)

Задача. Вершина горы *Моуна Роа* (на Сандвичевыхъ островахъ) видна съ моря на разстояніи отъ нея за 2° 33′; спрашивается какъ высока эта гора, измѣренная въ туазахъ или въ парижскихъ футахъ.

Рѣшеніе. Если CD изображаетъ высоту горы (черт. 17), то линія зрѣнія AC съ земнымъ радіусомъ AB составитъ прямой уголъ, притомъ извѣстно, что земной радіусъ AB = 3271691 туазовъ, туазъ = 6 парижск. фут., слѣдовательно въ треугольникѣ ABC, кромѣ прямаго угла A, извѣстны сторона AB и $\angle ABC = 2°\ 33'$, а потому можетъ быть опредѣлена и $DC = BC - BD$. (Туазъ = 6 ф. 4,74 русск. дюйма).

Задача 3.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC даны гипотенуза a и катетъ c; опредѣлить прочія части.

Рѣшеніе. $\text{Cos}\, B = \frac{c}{a}$, $\angle C = 90° - B$; $b = a.\ \text{Sin}\, B = c.\ \text{Tg}\, B.$

Численный примѣръ.

Пусть $a = 425$, $c = 342,958$.

Вычисленіе безъ логариѳмовъ.

$$\text{Cos}\, B = \frac{c}{a} = \frac{342,958}{425} = 0,80696,$$

слѣд. $B = 36°\ 12'$. Уголъ $C = 90° - 36°\ 12' = 53°\ 48'$.

Сторона b опредѣляется какъ и въ зад. 2.

Вычисленіе помощію логариѳмовъ.

Опредѣленіе угла B

$\log \text{Cos}\, B = \log c + \log' a$

$\log c = 2,535241$

$\log' a = 7,371611$

$\log \text{Cos}\, B = 9,906852$

$B = 36°\ 12'$

Опредѣленіе стороны b.

$\log b = \log a + \log \text{Sin}\, B.$

(См. зад. 1).

$C = 90° - B = 53°\ 48'$

Примѣч. Сторона b можетъ быть вычислена независимо отъ угла B, по формулѣ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}$, откуда
$\log b = \frac{1}{2}[\log(a+c) + \log(a-c)]$.

Второй численный примѣръ.

Пусть $a = 213,16$; $b = 116,13$.

Вычисленіе угла B.	*Вычисленіе стороны c.*
$\log \mathrm{Sin}\, B = \log 116,13 + \log' 213,16$	$\log c = \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)]$
$\log 116,13 = 2,064944$	$\log c = \frac{1}{2}(\log 329,29 + \log 97,03)$
$\log' 213,16 = 7,671294$	$\log c = \frac{1}{2}.4,504485$
$\log \mathrm{Sin}\, B = 9,736238$	$\log c = 2,252243$
$B = 33° 0' 40''$	$c = 178,74.$

Уголъ C можетъ быть вычисленъ или помощію угла B, или независимо отъ угла B, по формулѣ $\mathrm{Cos}\, C = \frac{b}{a}$.

Примѣры для упражненій.

Данныя.		Искомыя.		
a	b	B	C	c
1208,7	1196	81° 41′ 9″	8° 48′ 51″	174,77
$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{250}$	53° 7′ 48″	36° 52′ 12″	0,003
$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt{10}$	42° 56′ 41″	47° 3′ 19″	3,3977

Задача. Дорога, идущая въ гору, имѣетъ вездѣ равномѣрное повышеніе на 6 процентовъ; какъ великъ уголъ наклоненія покатости къ горизонту?

Задача 4.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC даны оба катета b и c; опредѣлить прочія части.

Рѣш. $\mathrm{Tang}\, B = \frac{b}{c}$, $C = 90° - B$; $a = \frac{c}{\mathrm{Cos}\, B} = c\, \mathrm{Sec}\, B$.

Численный примѣръ.

Пусть $b = 251,0073$ и $c = 342,958$.

$\mathrm{Tang}\, B = \frac{b}{c} = \frac{251,0073}{342,958} = 0,73189$; слѣд. $B = 36° 12'$.

Гипотенуза a и уголъ C находятся какъ во 2-ой задачѣ.

Вычисленіе той же задачи помощію логариѳмовъ.

Опредѣленіе угла B.

$\log B = \log b + \log' c$

$\log b = 2{,}399686$

$\log' c = 7{,}464759$

$\log \operatorname{Tang} B = 9{,}864445 - 10$

$B = 36° 12'$

Опредѣленіе угла C.

$C = 90° - B = 53° 48''$

$a = 425$ (см. зад 2).

Непосредственное вычисленіе стороны a можетъ быть произведено помощію формулы $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Примѣчаніе. Формула $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ не допускаетъ непрерывнаго логариѳмованія. Обращеніе ея въ логариѳмическую, помощію вспомогательнаго угла, производится слѣдующимъ образомъ:

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{b^2\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)} = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}$. Положимъ $\frac{c}{b} = \operatorname{Tang} \varphi$, получимъ $a = b\sqrt{1 + \operatorname{Tang}^2 \varphi} = b . \operatorname{Sec} \varphi$;

или $a = \frac{b}{\operatorname{Cos} \varphi}$, причемъ $\operatorname{Tang} \varphi = \frac{c}{b}$.

(Подробнѣе см далѣе: о вспомогательныхъ углахъ и о преобразованіи нелогариѳмическихъ формулъ въ логариѳмическія).

Мы положили, что дробь $\frac{c}{b} = \operatorname{Tang} \varphi$; такое предположеніе всегда возможно, потому что *тангенсъ*, заключаясь между 0 и $\pm \infty$, можетъ содержать въ себѣ всѣ возможныя величины.

Второй примѣръ для вычисленій.

Пусть $b = 723{,}4$; $c = 233{,}5$.

По выведеннымъ формуламъ получимъ:

$\log \operatorname{Tg} C = \log 233{,}5 + \log' 723{,}4$

$\log 233{,}5 = 2{,}368287$

$\log' 723{,}4 = 7{,}140621 - 10$

$\log \operatorname{Tg} C = 9{,}508908 - 10$

$C = 17° 53' 20'',7$

Слѣд. $B = 90° - C = 72° 6' 39'',3$

$\log a = \log c + \log' \operatorname{Sin} C$

$\log a = \log 233{,}5 + \log' \operatorname{Sin} 17° 53' 20'',7$

$\log a = 2{,}368287 + 0{,}512613$

$\log a = 2{,}880900$, откуда

$a = 760{,}151$,

или $a = \sqrt{(233{,}5^2 + 723{,}4^2)} = 760{,}151$

Примѣры для упражненій.

Данныя.		Искомыя.		
b	*c*	*C*	*B*	*a*
174,3	98,68	20°30′59″	60°29′ 1″	200,3
0,035	0,1858	79°19′55″,1	10°40′ 4″,9	0,18906
2 в. 121 с. 2 ф.	2 в 278 с. 1 ф.	48°44′24″,9	41°15′35″,1	3 в. 200 с. 1 ф. 9

Задача 1. Цѣль для стрѣльбы прикрѣплена къ вертикальному шесту, на разстояніи 76 фут отъ земли; подъ какимъ угломъ наклоненія должны быть производимы выстрѣлы въ эту цѣль, если барьеръ для стрѣльбы находится на разстояніи 120 фут. отъ основанія шеста.

(Предполагается, что поверхность земли выбрана ровная и горизонтальная, притомъ баллистическое уклоненіе снаряда отъ прямой линіи во вниманіе не принимается).

Задача 2. Столбъ, имѣющій вышину 37,2 фут., и утвержденный вертикально, въ извѣстное время дня бросаетъ тѣнь въ 18 фут. Опредѣлить высоту солнца и какъ велико разстояніе отъ вершины столба до конца тѣни?

Примѣчаніе, относящееся ко всѣмъ четыремъ случаямъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.

Изъ предложенныхъ нами теоремъ понятно, что прямоугольный треугольникъ возможенъ при всякомъ заданіи, исключая *третьяго случая;* для возможности заданія треугольника *по даннымъ гипотенузѣ и сторонѣ* необходимо, чтобы *эта сторона* была *менѣе гипотенузы*. Въ противномъ случаѣ невѣрность заданія выразится какъ геометрическимъ построеніемъ, такъ и самою формулою $\text{Sin } B = \frac{b}{a}$, въ которой будетъ $b > a$, слѣдоват. $\text{Sin } B > 1$, чего быть не можетъ.

Тоже самое получимъ и при вычисленіи логариѳмами:

$$\log \text{Sin } B = \log b + 10 - \log a,$$

но, при $b > a$, $\log b - \log a > 0$,

слѣдоват $\log \text{Sin } B > 10$, что невозможно. Вообще выраженія:

$$\text{Sin } a > 1, \quad \text{Cos } a > 1, \quad \text{Sec } a < 1, \quad \text{Cosec } a < 1,$$

$$\log \text{Sin } a > 10, \log \text{Cos } a > 10, \log \text{Sec } a < 10, \log \text{Cosec } a < 10$$

принимаются въ тригонометріи за *символы нелѣпости*, подобно тому, какъ въ алгебрѣ $\sqrt{-1}$ есть *выраженіе мнимое*.

Показанные нами невозможные тригонометрическіе результаты обозначаютъ или невѣрность при заданіи, или неправильность при вычисленіи.

§ 12.

Основныя теоремы, служащія для рѣшенія косвенноугольныхъ треугольниковъ.

Теорема 4.

Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ угловъ, имъ противолежащихъ, т. е.

$$a : b = \text{Sin } A : \text{Sin } B.$$

Доказательство. Пусть данныя стороны противолежатъ острымъ угламъ.

Изъ вершины угла C, не входящаго въ пропорцію, на противолежащую сторону опустивъ перпендикуляръ CD (черт. 3, № 2), получимъ два прямоугольные треугольника ADC и CDB, въ которыхъ

$$\text{Sin } A = \frac{CD}{b} \quad . . (\S\ 10;\ \text{т. } 1)$$
$$\text{Sin } B = \frac{CD}{a}$$

раздѣливъ равныя на равныя, получимъ

$\text{Sin } A : \text{Sin } B = a : b$, или обратно, $a : b = \text{Sin } A : \text{Sin } B \ . . . \ (\alpha)$.

Такимъ же образомъ доказали бы, что $b : c = \text{Sin } B : \text{Sin } C \ . . . \ (\beta)$,

откуда $a : b : c = \text{Sin } A : \text{Sin } B : \text{Sin } C \quad . \quad . \ (\gamma)$,

или $\dfrac{a}{\text{Sin } A} = \dfrac{b}{\text{Sin } B} = \dfrac{c}{\text{Sin } C} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\delta)$. **(4)**.

Если треугольникъ ABC тупоугольный при B (черт. 3, № 3), то перпендикуляръ CD падетъ на продолженіе стороны AB, и получимъ также два прямоугольные треугольника ADC и CDB, и тѣже самыя формулы:

$$\text{Sin } A = \frac{CD}{b} \text{ и } \text{Sin } CBA = \text{Sin } CBD = \frac{CD}{a},$$

(потому что синусы исполнительныхъ угловъ ABC и CBD равны между собою), слѣдовательно и тѣже пропорціи (γ) и (δ).

Доказанное нами правило (γ) или (δ), справедливое для всѣхъ прямолинейныхъ треугольниковъ, называется *правиломъ синусовъ*.

Примѣч. Выведенныя нами пропорціи весьма часто пишутся въ видѣ уравненій изъ (α) и (β);

$a \text{ Sin } B = b. \text{ Sin } A$, слѣд. $\log a + \log \text{Sin } B = \log b + \log \text{Sin } A$,
$b \text{ Sin } C = c. \text{ Sin } B$ $\quad \log b + \log \text{Sin } C = \log c + \log \text{Sin } B$;
$c \text{ Sin } A = a. \text{ Sin } C$ $\quad \log c + \log \text{Sin } A = \log a + \log \text{Sin } C$.

Въ каждомъ изъ этихъ уравненій по тремъ даннымъ легко опредѣлить четвертую неизвѣстную величину, а именно: зная двѣ стороны треугольника и уголъ, противолежащій другой данной сторонѣ, или обратно, зная два угла треугольника и сторону, противолежащую одному изъ нихъ, отыскать сторону, противолежащую другому данному углу.

Теорема 5.

Во всякомъ треугольникѣ каждая изъ сторонъ равна суммѣ произведеній, полученныхъ отъ умноженія каждой изъ двухъ

прочихъ сторонъ на косинусы угловъ, соотвѣтственно заключенныхъ между первою стороною и каждою изъ послѣднихъ, т. е. напримѣръ,

$$c = b.\ \text{Cos}\ A + a.\ \text{Cos}\ B \quad \ldots \quad (5).$$

Доказательство, для стороны при острыхъ углахъ (черт 3, № 2),

$$c = AD + DB;$$

но $AD = b.\ \text{Cos}\ A;\ DB = a\ \ \text{Cos}\ B$ (§ 10, теор. 2); подставивъ, получимъ $c = b.\ \text{Cos}\ A + a.\ \text{Cos}\ B$.

Тоже и для *тупоугольнаго треугольника* (черт. 3, № 3) $c = AB = AD - BD;$

но $AD = b\ \ \text{Cos}\ A;\ BD = a.\ \text{Cos}\ CBD = a\ (-\text{Cos}\ CBA) = -a.\ \text{Cos}\ CBA$, а потому $(-BD) = a.\ \text{Cos}\ CBA$, слѣдовательно и для стороны, прилежащей тупому углу, формула (5) — остается безъ измѣненій, а именно $c = b.\ \text{Cos}\ A + a.\ \text{Cos}\ B \quad \ldots \quad (5, \alpha)$.

Формула эта показываетъ взаимную зависимость между тремя сторонами треугольника и двумя его углами.

Примѣч. Помощію этой теоремы не трудно вывести отношеніе между двумя углами и двумя сторонами, содержащими одинъ изъ угловъ.

Рѣшеніе Пусть требуется вывести отношеніе между A, B, b, c. (черт 3, № 2);

$CD = y = b.\ \text{Sin}\ A;$	откуда
но также $y = DB.\ \text{Tang}\ B,$	$b\ \ \text{Sin}\ A = DB.\ \text{Tang}\ B,$

сторона же $DB = c - AD = c - b.\ \text{Cos}\ A,$

слѣдовательно $b.\ \text{Sin}\ A = (c - b.\ \text{Cos}\ A)\ \text{Tang}\ B$

откуда $\text{Tang}\ B = \dfrac{b\ \text{Sin}\ A}{c - b\ \text{Cos}\ A} \quad \ldots \quad (5, \beta).$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\text{Tang}\ A = \frac{a\ \text{Sin.}\ C}{b - a\ \text{Cos}\ C}.$$

Теорема 6.

Во всякомъ треугольникѣ квадратъ одной изъ сторонъ равенъ суммѣ квадратовъ двухъ прочихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія этихъ сторонъ на косинусъ угла противолежащаго первой сторонѣ, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc.\ \text{Cos}\ A \ \text{(черт. 3)} \quad \ldots \quad (6).$$

Случай 1 ***Если сторона противолежитъ острому углу.***

Доказательство. Положивъ для краткости $CD = y$ и $AD = x$, по извѣстной геометрической теоремѣ получимъ, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ cx \ \text{(черт. 3, № 2)};$$

но $x = AD = b\ \text{Cos}\ A$ (§ 10, теор. 2), подставивъ, найдемъ, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b.\ c\ \text{Cos}\ A.$$

Таже формула справедлива и для треугольника ABC (черт. 3, № 2), въ которомъ сторона a прилежитъ тупому углу.

Случай 2 *Если сторона противолежитъ тупому углу* (черт. 3, №1),

$$\text{то } a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cx;$$

но въ треугольникѣ ADC, $AD = x = b$ Cos $C\,AD$, и какъ $CAD = 180° - CAB = 180° - A$, то Cos $CAD = -$ Cos A, слѣдовательно $x = b.\,(-\text{Cos}\,A) = -\,b.\,\text{Cos}\,A$, подставивъ получимъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\,\text{Cos}\,A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Такимъ же образомъ вывели бы что

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\,\text{Cos}\,B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.\,\text{Cos}\,C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos}\,A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}, \\ \text{Cos}\,B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}, \\ \text{Cos}\,C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}; \end{aligned}\right\} \quad (7) \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

т. е. *во всякомъ косвенноугольномъ треугольникѣ косинусъ одного изъ угловъ равенъ дроби, которой числитель есть сумма квадратовъ сторонъ содержащихъ этотъ уголъ, безъ квадрата стороны противолежащей этому углу, а знаменатель удвоенное произведенiе сторонъ содержащихъ этотъ уголъ.*

Примѣч 1. Формулы (α). (β), (γ) могутъ быть употреблены при вычисленiи стороны треугольника по двумъ даннымъ сторонамъ и по углу между ними, а формулы (δ) служатъ для вычисленiя угла по тремъ даннымъ сторонамъ треугольника.

Примѣч. 2. Теорема эта называется *общею Пиѳагоровою*, потому что извѣстная геометрическая теорема для прямоугольнаго треугольника есть только частный случай теоремы нами доказанной; и дѣйствительно, въ формулѣ (α) положивъ $A = 90°$, получимъ Cos $A = 0$, слѣдовательно вся формула (α) обратится въ $a^2 = b^2 + c^2$.

Независимое доказательство общей Пиѳагоровой теоремы нетрудно вывести помощiю 5-й главной теоремы (§ 12), такъ какъ

$$a = b.\,\text{Cos}\,C + c.\,\text{Cos}\,B$$
$$b = a\ \text{Cos}\,C + c.\,\text{Cos}\,A$$
$$c = a.\,\text{Cos}\,B + b.\,\text{Cos}\,A,$$

то помножая каждое изъ уравненiй по порядку на a, b, c и вычитая два послѣднiя изъ перваго, получимъ

$$a^2 = \quad ab\,\text{Cos}\,C + ac\,\text{Cos}\,B$$
$$-\,b^2 = -\,ab\,\text{Cos}\,C - bc\,\text{Cos}\,A,$$
$$-\,c^2 = -\,ac\,\text{Cos}\,B - bc\,\text{Cos}\,A.$$

Соединяя всѣ три уравненiя, имѣемъ

$$a^2 - b^2 - c^2 = -\,2\,bc\,\text{Cos}\,A, \text{ или}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\text{Cos}\,A. \text{ ч. и д. н.}$$

Теорема 7.

Во всякомъ косвенноугольномъ треугольникѣ квадратъ синуса половины одного изъ угловъ равенъ произведенію разностей полупериметра треугольника предъ каждою изъ сторонъ содержащихъ этотъ уголъ, раздѣленному на произведеніе тѣхъ же сторонъ,

т. е $\text{Sin}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}$ . . . . **(8).**

Изъ предыдущей теоремы имѣемъ $\text{Cos}\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, bc}$, по которой и можетъ быть опредѣленъ уголъ A, въ зависимости отъ трехъ сторонъ треугольника.

Но какъ формула эта неудобна для непрерывнаго логариѳмованія, то преобразуя ее въ логариѳмическую, получимъ

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\, bc.\ \text{Cos}\, A \\ &= (b^2 + c^2 - 2\, bc) + (2\, bc - 2\, bc\, \text{Cos}\, A); \\ &= (b - c)^2 + 2\, bc.\ (1 - \text{Cos}\, A) \\ &= (b - c)^2 + 2\, bc.\ 2\, \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A \ (\S\ 7;\ \text{форм. } 10), \end{aligned}$$

отнимая отъ обѣихъ частей по $(b-c)^2$, и раздѣляя обѣ части уравненія на $4\, bc$, получимъ $\text{Sin}^2 \frac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4\, bc}$,

$$= \frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{4\, bc}.$$

Полагая сумму сторонъ $a+b+c = 2\,p$, или $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. получимъ

$$a+b-c = 2\ (p-c),$$
$$a-b+c = 2\ (p-b);$$ подставивъ,

найдемъ $\text{Sin}^2 \frac{1}{2} A = \frac{2\ (p-c)\ 2\ (p-b)}{4\ bc} = \frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}$,

откуда $2 \log \text{Sin} \frac{1}{2} A = \log (p-b) + \log (p-c) + \log' b + \log' c$.

Такъ же выведемъ, что

$$\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(p-a)\ (p-c)}{ac};\ \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(p-a)\ (p-b)}{ab}$$

или $\text{Sin}\ \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{ac}}$; $\text{Sin}\ \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{ab}}$;

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}}.$$

Теорема 8.

Косинусъ квадратъ половины одного изъ угловъ равенъ произведенію изъ полупериметра треугольника на разность полупериметра предъ стороною противолежащею этому углу, раздѣленному на произведеніе сторонъ содержащихъ этотъ уголъ, т. е.

$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{p(p-a)}{bc} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Доказательство Изъ формулы $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\operatorname{Cos} A$ получимъ

$$a^2 = (b^2 + c^2 + 2\,bc) - (2\,bc + 2\,bc.\operatorname{Cos} A)$$
$$= (b + c)^2 - 2\,bc\,(1 + \operatorname{Cos} A)$$
$$= (b + c)^2 - 2\,bc.\,2\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A \text{ (§ 7; форм. 11)}$$

откуда

$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4\,bc} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,bc}$$
$$= \frac{2\,p.\,2\,(p-a)}{4\,bc}, \text{ или}$$
$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{p\,(p-a)}{bc}, \text{ откуда } \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}.$$

Логариѳмуя эту формулу, получимъ

$$2 \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \log p + \log (p - a) + \log' b + \log' c$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{p\,(p-b)}{ac}, \quad \text{или} \quad \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{p\,(p-c)}{ab}, \quad \text{или} \quad \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}$$

Теорема 9.

Тангенсъ квадратъ половины одного изъ угловъ равенъ произведенію разностей полупериметра предъ каждою изъ сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ, раздѣленному на произведеніе изъ полупериметра на разность полупериметра предъ стороною противолежащею этому углу т. е. $\operatorname{Tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}$ . . . . . . (10).

Доказательство. Уже было доказано (теор. 7 и 8), что

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}\\ \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{p\ (p-a)}{bc}\end{aligned}\right\}$$ раздѣливъ 1-е уравненіе на 2-е,

получимъ $\operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-c)\ (p-b)}{p\ (p-a)}$, или $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}}$.

Такимъ же образомъ выведутся формулы и для прочихъ угловъ, а именно:

$$\operatorname{Tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)},\quad \text{или}\quad \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}};$$

$$\operatorname{Tang}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)},\quad \text{или}\quad \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}.$$

Логариѳмуя формулу (10), получимъ

$$2 \log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} A = \log (p-b) + \log (p-c) + \log' p + \log' (p-a).$$

Прибавленіе. Зная величины синусовъ и косинусовъ половинныхъ угловъ, не трудно вывести и синусы цѣлыхъ угловъ въ функціи сторонъ треугольника.

$\operatorname{Sin} A = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} A . \operatorname{Cos} \frac{1}{2} A$ (§ 7; форм. 8),

въ эту формулу подставивъ выраженія, выведенныя нами для $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} A$ и $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} A$ (теор. 7 и 8),

получимъ $$\operatorname{Sin} A = \frac{2}{bc} \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}. \qquad (11).$$

Такимъ же образомъ $$\operatorname{Sin} B = \frac{2}{ac} \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)},$$

и $$\operatorname{Sin} C = \frac{2}{ab} \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$$

Удобство при вычисленіи по этимъ формуламъ состоитъ въ томъ, что при вычисленіи всѣхъ трехъ угловъ находимъ одну и ту же подкоренную величину и множителя 2, такъ что все различіе въ вычисленіи будетъ заключаться только въ двухъ логариѳмахъ сторонъ, содержащихъ искомый уголъ. Для избѣжанія двойственности рѣшенія, происходящей отъ вычисленія по формулѣ синусовъ, начинаютъ вычисленіе обыкновенно съ угловъ противолежащихъ меньшимъ сторонамъ и потомъ уже вычисляютъ уголъ противолежащій большей сторонѣ, ограничивая его величину по исполненію суммы двухъ прочихъ вычисленныхъ уже угловъ.

Примѣч. 1. При вычисленіи угла, близко подходящаго къ 0°, должно предпочитать употребленіе формулы синуса половиннаго угла, а когда искомый уголъ близокъ къ 180°, то удобнѣе производить вычисленіе въ косинусахъ, или вообще при углѣ отъ 0° до 90° вычислять въ синусахъ половинныхъ угловъ, а при углѣ отъ 90° до 180° въ косинусахъ, тогда неточности въ логариѳмахъ данныхъ величинъ произведутъ меньшую погрѣшность въ вычисляемыхъ углахъ. Если же по тремъ сторонамъ треугольника требуется опредѣлить каждый изъ его угловъ, то формула тангенса половиннаго угла представляетъ видимыя преимущества предъ вычисленіемъ этихъ угловъ по формуламъ синусовъ и косинусовъ, потому что въ первомъ случаѣ, для отысканія всѣхъ трехъ угловъ, достаточно прінскать только логариѳмы четырехъ величинъ, а именно $\log p$, $\log (p-a)$, $\log (p-b)$, $\log (p-c)$; между тѣмъ какъ при вычисленіи трехъ угловъ по разнымъ формуламъ, одного по синусамъ, другаго по косинусамъ, а третьяго по тангенсамъ, должно было бы прінскать логариѳмы семи величинъ: a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Примѣч. 2 Если заданіе треугольника по сторонамъ геометрически вѣрно, то величины $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} A$, $\operatorname{Cos} \frac{1}{2} A$, $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} A$ будутъ всегда возможны, потому что изъ неравенства

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c$$

непосредственно слѣдуетъ, что

$$b + c - a > 0, \quad a + c - b > 0, \quad a + b - c > 0$$

т. е. что всѣ сомножители подъ радикаломъ суть величины положительныя.

Притомъ понятно, что каждая изъ вычисляемыхъ дробей менѣе единицы и знакъ при корнѣ во всѣхъ формулахъ есть $+$, потому что весь уголъ $A < 180°$, слѣдовательно $\frac{1}{2} A < 90°$.

Примѣч. 3. Вообще вычисленіе треугольниковъ помощію половинныхъ угловъ представляетъ много удобствъ. Такъ какъ половина каждаго изъ угловъ треугольника всегда находится въ первой четверти, то при этомъ способѣ вычисленій отстраняется сомнѣніе при выборѣ величины угла, хотя бы вычисленіе произведено было въ синусахъ.

Теорема 10.

Во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ неравныхъ сторонъ относится къ ихъ разности, какъ тангенсъ полусуммы угловъ, противолежащихъ этимъ сторонамъ, относится къ тангенсу ихъ полуразности; или какъ котангенсъ половины угла, содержимаго между этими сторонами, относится къ тангенсу полуразности угловъ противолежащихъ этимъ сторонамъ.

Доказат. Уже доказано, что $a : b = \operatorname{Sin} A : \operatorname{Sin} B$ (§ 12, теор. 4), слѣдовательно: $a + b : a - b = \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B : \operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B$, но и $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} (A + B) : \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (A - B) = \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B : \operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B$, откуда $a + b : a - b = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (A + B) : \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (A - B)$ . . (**12**).

Прибавленіе. Во всякомъ треугольникѣ $A + B + C = 180°$, слѣд. $A + B = 180° - C$; $\frac{1}{2} (A + B) = 90° - \frac{1}{2} C$, а потому

$$\operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} (A + B) = \operatorname{Tang} (90° - \tfrac{1}{2} C) = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} C,$$

подставивъ эту величину въ формулу (12), получимъ

$$a + b : a - b = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} (A - B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{13}).$$

Въ формулахъ (12) и (13) три члена извѣстны, четвертый $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$ найдется.

Взявъ логариѳмы этихъ величинъ, по формулѣ получимъ

$$\log\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + \log\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C - \log(a+b).$$

Пусть $\frac{1}{2}(A+B) = m,$ | слагая, имѣемъ $A = m + n;$
$\frac{1}{2}(A-B) = n;$ | вычитая, ... $B = m - n$ (*).

Общ. примѣч. къ § 12. Черезъ примѣненіе выведенныхъ нами формулъ къ различнымъ случаямъ заданія треугольниковъ нетрудно убѣдиться, что всѣ различные случаи могутъ быть приведены къ тремъ главнымъ теоремамъ: a) *къ формулѣ синусовъ* (теор. 4), b) *къ формулѣ полусуммы и полуразности двухъ неравныхъ сторонъ* (теор 10) и наконецъ c) *къ формуламъ полупериметра* (теор. 7, 8, 9).

Теорема 11.

(Формулы Мольвейде).

Во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ относится къ третьей, какъ косинусъ полуразности угловъ, противолежащихъ первымъ сторонамъ, относится къ синусу половины угла, противолежащаго третьей сторонѣ, т. е.

$$a+b : c = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

и разность двухъ сторонъ относится къ третьей, какъ синусъ полуразности угловъ противолежащихъ этимъ сторонамъ относится къ косинусу половины угла противолежащаго третьей сторонѣ, т. е.

$$a-b : c = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Доказательство Изъ $a : b : c = \mathrm{Sin}\,A : \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,C$ (т. 4; § 12)

имѣемъ $\quad a+b : c = \mathrm{Sin}\,A + \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,C;$

(по § 7, форм. 19 и 8) $= 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B) : 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}C\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}C;$

но $\quad \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B) = \mathrm{Sin}(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}C,$

слѣдовательно, подставивъ, получимъ

$$a+b : c = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C;$$

наконецъ, сокращая на $2\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}C$, найдемъ

$$a+b : c = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Такимъ же образомъ докажется и форм. (15)

$$a-b : c = \mathrm{Sin}\,A - \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,C$$

$$= 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C;$$

но $\quad \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B) = \mathrm{Cos}(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}C,$

подставивъ это выраженіе въ выведенную формулу, и сокративъ на $2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}C$, получимъ

$$a-b : c = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B) : \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Примѣч Помощію формулъ *Мольвейде* вычисляются треугольники въ тѣхъ случаяхъ, когда въ число данныхъ входятъ суммы или разности двухъ сторонъ или двухъ угловъ.

(*) Потому что изъ двухъ алгебрическихъ количествъ большее равно полусуммѣ съ полуразностію, а меньшее равно полусуммѣ безъ полуразности.

Прибавленіе. Предлагаемъ еще нѣсколько формулъ, употребляемыхъ иногда при вычисленіи косвенноугольныхъ треугольниковъ.

1) Если бы приняли за главныя уравненія

$$c = b \text{ Cos } A + a \text{ Cos } B \text{ (т. 5; § 12) и}$$
$$b \text{ Sin } A = a \text{ Sin } B \text{ (т. 4; § 12),}$$

и изъ 2-й формулы въ 1-ю подставили бы

$$a = \frac{b \text{ Sin } A}{\text{Sin } B}, \text{ или } b = \frac{a \text{ Sin } B}{\text{Sin } A},$$

то получили бы

$$c = b \text{ Cos } A + b \text{ Sin } A \text{ Cotg } B, \text{ или}$$
$$c = a \text{ Sin } B. \text{ Cotg } A + a \text{ Cos } B,$$

которыя очевидно тождественны съ (β, теор. 5).

2) Вычисленіе треугольника по тремъ даннымъ сторонамъ можетъ быть также весьма легко произведено помощію извѣстной геометрической теоремы.

Во всякомъ треугольникѣ, если отъ вершины одного изъ угловъ проведемъ высоту, то основаніе будетъ относиться къ суммѣ сторонъ, какъ разность этихъ сторонъ относится къ разности или суммѣ отрѣзковъ основанія, (смотря по тому будетъ ли треугольникъ остроугольный или тупоугольный).

Если $c > a > b$, то принявъ C за центръ, меньшую сторону b за радіусъ, и описавъ окружность, получимъ $c : a + b = a - b : x$ (черт. 18), гдѣ $x = BE - AE$, изъ пропорціи же

$$x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}, \text{ зная } x, \text{ получимъ } AD = c - x,$$

$$AE = \frac{c-x}{2}, \text{ Cos } A = \frac{AE}{AC} = \frac{c-x}{2b}; \; EB = c - \left(\frac{c-x}{2}\right) = \frac{c+x}{2}.$$

$$\text{Cos } B = \frac{EB}{CB} = \frac{c+x}{2a}; \; \angle C = 180^\circ - (A+B).$$

3) Изъ четвертой теоремы § 12 мы знаемъ, что во всякомъ треугольникѣ отношеніе $\frac{a}{\text{Sin } A} = \frac{b}{\text{Sin } B} = \frac{c}{\text{Sin } C}$ равно нѣкоторой постоянной величинѣ.

Описавъ около даннаго треугольника кругъ (черт. 19), черезъ одну изъ вершинъ проведемъ діаметръ $CD = 2R$, и соединимъ точки D и B.

Изъ прямоугольнаго треугольника BCD имѣемъ $BC = CD.$ Sin D, но какъ $BC = a$, $D = A$ и $CD = 2R$, то подставивъ, получимъ $A = 2R.$ Sin A,

или $$\frac{a}{\text{Sin } A} = 2R = \text{діаметру},$$ т. е. *постоянное количество, показывающее отношеніе между стороною треугольника и синусомъ угла ему противолежащаго равно діаметру круга описаннаго около этого треугольника.*

Отсюда понятно, что для всѣхъ треугольниковъ, которые могутъ быть вписаны въ томъ же кругѣ, отношеніе это одно и тоже.

4) Предлагаемъ учащимся вывести и доказать слѣдующія формулы и теоремы.

Во всякомъ треугольникѣ, обозначая черезъ A, B, C три угла, а черезъ a, b, c три стороны, получимъ:

$$\alpha) \text{ Tang } A + \text{Tang } B + \text{Tang } C = \text{Tang } A. \text{ Tang } B. \text{ Tang } C.$$

$$\beta) \text{ Cotg } \frac{A}{2} + \text{Cotg } \frac{B}{2} + \text{Cotg } \frac{C}{2} = \text{Cotg } \frac{A}{2}. \text{ Cotg } \frac{B}{2}. \text{ Cotg } \frac{C}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Sin } A + \text{Sin } B + \text{Sin } C = 4 \text{ Cos } \frac{A}{2}. \text{ Cos } \frac{B}{2}. \text{ Cos } \frac{C}{2}.$$

d) $\operatorname{Sin}^2 A = \operatorname{Sin}^2 B + \operatorname{Sin}^2 C - 2 \operatorname{Sin} B . \operatorname{Sin} C . \operatorname{Cos} A$. Формула эта справедлива для каждаго изъ угловъ треугольника, а потому, если

$\operatorname{Sin}^2 A = \operatorname{Sin}^2 B + \operatorname{Sin}^2 C$, то треугольникъ — прямоугольный при A.

e) Обозначая черезъ R и r соотвѣтственно радіусы круговъ описаннаго около треугольника и въ немъ вписаннаго, получимъ

$$R = \frac{r}{4 \operatorname{Sin} \frac{A}{2} . \operatorname{Sin} \frac{B}{2} . \operatorname{Sin} \frac{C}{2}}.$$

Прибавленіе: о вспомогательныхъ углахъ, о преобразованіи нелогариѳмическихъ формулъ въ логариѳмическія, и о рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій.

Для непосредственнаго приложенія логариѳмовъ къ формулѣ, при изысканіи неизвѣстныхъ численныхъ величинъ, необходимо сперва преобразовать ее въ такую, которая содержала бы въ себѣ только одночленные множители цѣлые или дробные, или только такіе многочлены, надъ которыми могло бы быть произведено ариѳметическое сложеніе и вычитаніе. Формулу, неимѣющую этого вида, называютъ *нелогариѳмическою.*

Нѣкоторыя изъ этихъ преобразованій намъ уже извѣстны.

Если данное выраженіе содержитъ въ себѣ суммы или разности двухъ синусовъ, или двухъ косинусовъ, а также двухъ тангенсовъ, или двухъ котангенсовъ, то такія алгебраическія суммы могутъ быть преобразованы въ логариѳмическія помощію извѣстныхъ формулъ (19, 20, 21, 22, 23 и т. д. § 7), которыя поэтому весьма удобны для тригонометрическаго счисленія.

Нѣкоторыя изъ такихъ формулъ, безъ примѣненія логариѳмовъ, могутъ быть гораздо легче вычисляемы помощію натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.

Пусть напримѣръ требуется вычислить x по уравненію

$$x = \operatorname{Sin} 38° + \operatorname{Sin} 26°.$$

Рѣшеніе помощію логариѳмовъ.

Положивъ $38° = p$, $26° = q$, (по ф. 19, § 7) получ. $\operatorname{Sin} p + \operatorname{Sin} q = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(p-q)$, гдѣ $\frac{1}{2}(p+q) = 32°$, $\frac{1}{2}(p-q) = 6°$.

$$\begin{aligned} \log\ 2 &= 0{,}301030 \\ \log \operatorname{Sin} 32° &= 9{,}724210 \\ \log \operatorname{Cos}\ 6° &= 9{,}997614 \\ \hline \log x &= 0{,}022854 \\ x &= 1{,}0540. \end{aligned}$$

Рѣшеніе безъ логариѳмовъ.

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} 38° &= 0{,}615662 \\ \operatorname{Sin} 26° &= 0{,}438371 \\ \hline x &= 1{,}054033. \end{aligned}$$

Рѣшить уравненіе,

$x = \operatorname{Sin}\ p - \operatorname{Cos}\ q + \operatorname{Tang}\ m - \operatorname{Cotg}\ n$,

гдѣ $p = 57°\ 30'$, $m = 69°$,

$q = 19°\ 40'$, $n = 83°\ 20'$.

Но не всѣ формулы могутъ быть подведены подъ законы этихъ частныхъ преобразованій, или непосредственнаго вычисленія помощію натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.

Болѣе другихъ употребительные пріемы для логариѳмическихъ преобразованій, вообще называемые *преобразованіями помощію вспомогательнаго угла*, состоятъ въ слѣдующемъ:

1. Пусть данъ биномъ $A + B$, въ которомъ или оба члена, или одинъ изъ нихъ, содержатъ въ себѣ тригонометрическія величины, то сумма эта можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ:

$$A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$$

Полагая, что дробь $\frac{B}{A}$ равна $\text{Tang}^2\,\varphi$ (ибо тангенсъ можетъ имѣть всѣ возможныя величины отъ 0 до $\pm\infty$), получимъ

$$A + B = A\,(1 + \text{Tang}^2\,\varphi) = A\,\text{Sec}^2\,\varphi = \frac{A}{\text{Cos}^2\,\varphi}.$$

Величина φ называется здѣсь *угломъ вспомогательнымъ*.

2. Биномъ $A - B$ преобразовать въ логариѳмическій.

Если по свойству вопроса, или по ходу вычисленія извѣстно, что изъ данныхъ членовъ $A > B$, то преобразуютъ слѣдующимъ образомъ:

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right),$$

но какъ $\frac{B}{A} < 1$, то положивъ $\frac{B}{A} = \text{Cos}^2\,\varphi$,

получимъ $A - B = A\,(1 - \text{Cos}^2\,\varphi) = A.\,\text{Sin}^2\,\varphi$.

Если же $B > A$, то положивъ $A - B = -(B - A)$, поступаютъ какъ показано.

3. Можно предложить и общее правило для логариѳмованія суммъ или разностей.

Пусть $x = A \pm B$, то $x = A\left(1 \pm \frac{B}{A}\right)$,

положивъ $\frac{B}{A} = \text{Tang}\,\varphi$, вмѣсто даннаго бинома получимъ

$$x = A\,(1 \pm \text{Tang}\,\varphi) = A\,\frac{\text{Cos}\,\varphi \pm \text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi};$$

но $\text{Cos}\,\varphi \pm \text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,\varphi \pm \text{Cos}\,(90° - \varphi)$

$$= 2\,\text{Cos}\,45°\,\text{Cos}\,(\varphi \mp 45°) = \sqrt{2}.\,\text{Cos}\,(\varphi \mp 45°),$$

слѣдоват. $x = \frac{A\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}\,(\varphi \mp 45^\circ)}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$, а потому

$\log x = \log A + \frac{1}{2}\log 2 + \log \mathrm{Cos}\,(\varphi \mp 45^\circ) + \log' \mathrm{Cos}\,\varphi$.

Примѣч. Вычисленіе логариѳмовъ суммъ и разностей двухъ чиселъ, которыхъ логариѳмы извѣстны, можетъ быть произведено помощію особыхъ таблицъ, называемыхъ *Гауссовыми*.

(См. мореходн. табл., изд. М. К. К. стр. 318, табл. 53 (*); а также *Келеровское* изданіе таблицъ Лаланда, Лейпц. 1832; подробнѣе въ таблицахъ Houel, изданныхъ въ Парижѣ 1858, или въ таблицахъ *Цеха* (Zech), которыя и вошли въ составъ таблицъ Веги, изд. Hülsse, 1849).

4. Пусть дана формула $x = m\,\mathrm{Sin}\,a \pm n\,\mathrm{Cos}\,a$, въ которой оба члена содержатъ тригонометрическія величины, притомъ коеффиціенты m и n могутъ заключать въ себѣ и другія тригонометрическія величины.

Данный биномъ преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$x = m\,(\mathrm{Sin}\,a \pm \frac{n}{m}\,\mathrm{Cos}\,a). \text{ Положивъ } \frac{n}{m} = \mathrm{Tang}\,\varphi,$$

получимъ $x = m\,(\mathrm{Sin}\,a \pm \mathrm{Tang}\,\varphi.\,\mathrm{Cos}\,a) = m\,(\mathrm{Sin}\,a \pm \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\,\mathrm{Cos}\,a)$,

или $$x = m\left(\frac{\mathrm{Sin}\,a.\,\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi.\,\mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\right) = \frac{m.\,\mathrm{Sin}\,(a \pm \varphi)}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Примѣчаніе. Вообще, если преобразуемая формула есть биномъ, въ которомъ находятся *синусъ* и *косинусъ той же дуги*, въ разныхъ членахъ, то оставляютъ ихъ въ скобкахъ, и къ одной изъ этихъ тригонометрическихъ линій стараются привести сомножителемъ тангенсъ или котангенсъ вспомогательной дуги.

5. Пусть данъ биномъ $y = m \pm n\,\mathrm{Sin}\,a$, гдѣ m и n суть численные множители, то

$$y = \frac{m}{\mathrm{Cos}\,a}\,\mathrm{Cos}\,a \pm n\,\mathrm{Sin}\,a = n\left(\frac{m}{n\,\mathrm{Cos}\,a}\,\mathrm{Cos}\,a \pm \mathrm{Sin}\,a\right),$$

полагая $\frac{m}{n\,\mathrm{Cos}\,a} = \mathrm{Tang}\,\varphi$, и подставляя въ преобразованное уравненіе,

получимъ $y = \frac{n\,\mathrm{Sin}\,(\varphi \pm a)}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$ (См. предыдущую формулу).

(*) „Таблицы для вычисленія *суммъ* и *разностей* двухъ чиселъ, извѣстныхъ только по своимъ логариѳмамъ", напечатанныя въ таблицахъ изданныхъ М. К. К., расположены не въ *три* столбца, какъ у *Гаусса*, а только въ *два*. Этому послѣднему расположенію таблицъ, предложенному итальянскимъ математикомъ *Леонелли* (Leonelli), съ небольшимъ измѣненіемъ слѣдовалъ *Цехъ* при составленіи своихъ большихъ семизначныхъ таблицъ.

6. Формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\operatorname{Cos} A$ преобразовать въ логариѳмическую для непосредственнаго вычисленія стороны a по даннымъ b, c и A.

Вмѣсто данной формулы получимъ (теор. 7; § 12)

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A,$$
$$= (b-c)^2 \left\{ 1 + \frac{4bc \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2} \right\},$$

полагая $\dfrac{4bc \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2} = \operatorname{Tang}^2 \varphi$, получимъ

$$a^2 = (b-c)^2 (1 + \operatorname{Tang}^2 \varphi) = (b-c)^2 \operatorname{Sec}^2 \varphi,$$ слѣдовательно

$$a = (b-c) \operatorname{Sec} \varphi = \frac{b-c}{\operatorname{Cos} \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta),$$

причемъ $$\operatorname{Tang} \varphi = \frac{2\sqrt{bc}.\operatorname{Sin} \frac{1}{2} A}{b-c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Помощію этой формулы можно по двумъ сторонамъ треугольника и углу между ними непосредственно отыскать третью сторону.

7. Такимъ же образомъ можетъ быть преобразовано въ логариѳмическое уравненіе $\operatorname{Tang} A = \dfrac{a \operatorname{Sin} C}{b - a \operatorname{Cos} C}$, въ которомъ по данымъ двумъ сторонамъ a и b, и углу между ними C непосредственно опредѣлиется уголъ A, противолежащій одной изъ данныхъ сторонъ. И дѣйствительно

$$\operatorname{Tang} A = \frac{a \operatorname{Sin} C}{b - a \operatorname{Cos} C} \text{ (§ 12, теор. 5) } = \frac{a \operatorname{Sin} C}{b\left(1 - \frac{a \operatorname{Cos} C}{b}\right)};$$

если $a < b$, то можемъ принять $\dfrac{a \operatorname{Cos} C}{b} = \operatorname{Cos} x$, слѣдовательно

$$\operatorname{Tang} A = \frac{a \operatorname{Sin} C}{b\ (1 - \operatorname{Cos} x)} = \frac{a \operatorname{Sin} C}{2b \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} x}.$$

Во всякомъ же случаѣ, будетъ ли $a < b$, или $a > b$, удобнѣе разложить ее на двѣ логариѳмическія формулы слѣдующимъ образомъ:

$$\operatorname{Tang} A = \frac{a \operatorname{Sin} C}{b - a \operatorname{Cos} C} = \frac{\operatorname{Sin} C}{\frac{b}{a} - \operatorname{Cos} C};$$ положивъ $\dfrac{b}{a} = \operatorname{Cotg} y \operatorname{Sin} C$,

получимъ

$$\operatorname{Tg} A = \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Cotg} y \operatorname{Sin} C - \operatorname{Cos} C} = \frac{\operatorname{Sin} C.\operatorname{Sin} y.}{\operatorname{Cos} y \operatorname{Sin} C - \operatorname{Sin} y \operatorname{Cos} C} = \frac{\operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} y}{\operatorname{Sin}(C-y)} \ldots \quad (\alpha)$$

Причемъ $\operatorname{Cotg} y = \dfrac{b}{a \operatorname{Sin} C}$, или $\operatorname{Tang} y = \dfrac{a \operatorname{Sin} C}{b}$.

Примѣчаніе 1 При вычисленіи угла A по формулѣ

$\operatorname{Tang} A = \frac{a \operatorname{Sin} C}{b - a \operatorname{Cos} C}$ надо замѣтить, что если $b < a \operatorname{Cos} C$, то тангенсъ будетъ *отрицательный*, и слѣдовательно уголъ A будетъ *тупой*, а потому въ этомъ случаѣ должно брать не табличный острый уголъ, но его исполненіе до 180°, абсолютная же величина найденнаго логариѳма даетъ оба угла безразлично.

Примѣчаніе 2. Въ сферической тригонометріи будемъ весьма часто прибѣгать къ подобнымъ преобразованіямъ. *Впрочемъ вычисленіе помощію логариѳмовъ можетъ быть* производимо и по нелогариѳмической формулѣ, при этомъ послѣднемъ вычисленіи неудобство состоитъ только въ томъ, что надо переходить отъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ къ логариѳмамъ чиселъ, и обратно.

8. Рѣшить уравненіе $\operatorname{Sin} x = \frac{7}{8} \operatorname{Cos} x$.

Рѣшеніе $\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{7}{8}$, $\operatorname{Tang} x = \frac{7}{8}$.

$$\left.\begin{array}{l} \log 7 = 0,845098 + 10 \\ \log 8 = 0,903060 \\ \hline \log \operatorname{Tg} x = 9,942008 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{откуда } x = & 41^\circ\, 11'\, 9'', 32 \\ \text{или} \quad = & 221^\circ\, 11'\, 9'', 32. \end{array}$$

9 Рѣшить уравненіе $m \operatorname{Sin} x \pm n \operatorname{Cos} x = p$.

Въ данномъ уравненіи, взявъ m общимъ множителемъ, получимъ

$$m\left(\operatorname{Sin} x \pm \frac{n}{m} \operatorname{Cos} x\right) = p.$$

Положивъ $\frac{n}{m} = \operatorname{Tang} \alpha$ . . . . (1),

и вставивъ эту величину въ данное уравненіе, получимъ

$$m\,(\operatorname{Sin} x + \operatorname{Tang} \alpha \ \operatorname{Cos} x) = p,$$

или
$$m\left(\operatorname{Sin} x \pm \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}.\operatorname{Cos} x\right) = p,$$

откуда
$$m\left(\frac{\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos} \alpha \pm \operatorname{Sin} \alpha.\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} \alpha}\right) = p$$

и наконецъ
$$\frac{m.\operatorname{Sin}(x+\alpha)}{\operatorname{Cos} \alpha} = p, \text{ или}$$

$$\operatorname{Sin}(x \pm \alpha) = \frac{p \operatorname{Cos} \alpha}{m} \ (*) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Помощію формулы (1) вычисливъ уголъ α и подставивъ его во вторую часть формулы (2), найдемъ уголъ $x \pm \alpha$, а слѣдовательно и уголъ x.

(*) Рѣшить уравненіе $13 \operatorname{Sin} x + 7 \operatorname{Cos} x = 9$. Сколько тутъ можетъ быть рѣшеній, если x находится между 0° и 360°, и всегда ли задача возможна?

10. Рѣшить уравненіе $0{,}718 \operatorname{Sin} x = -0{,}3 \operatorname{Cos} x$.

Рѣшеніе. $x = 157° 19' 24'', 58$ и
$x = 337° 19' 24'', 58$.

11. Рѣшить уравненіе $a \operatorname{Sin} (\alpha - \varphi) = b \operatorname{Sin} (\alpha + \varphi)$ относительно φ.

Рѣшеніе. Подставивъ вмѣсто $\operatorname{Sin} (\alpha - \varphi)$ и $\operatorname{Sin} (\alpha + \varphi)$ соотвѣтствующія величины, и раздѣливъ уравненіе на $\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \varphi$, получимъ

$$\operatorname{Tang} \varphi = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{Tang} \alpha.$$

Численное приложеніе. Какія величины получатся для φ, если $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 1$ и $\alpha = 104° 17' 32''$?

Рѣшеніе. $\varphi = 122° 7' 4'', 59$ и $\varphi = 302° 7' 4'', 59$.

§ 13.

Вычисленіе косвенноугольныхъ треугольниковъ.

Число возможныхъ случаевъ. Всякій треугольникъ состоитъ изъ трехъ сторонъ a, b, c и трехъ угловъ A, B, C, изъ этихъ шести величинъ по тремъ даннымъ надо отыскать остальныя три. Число возможныхъ различныхъ соединеній по три изъ шести величинъ равно $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} = 20$, но болѣе точное разсмотрѣніе взаимнаго положенія данныхъ въ треугольникѣ приводитъ насъ только къ *пяти* совершенно различнымъ случаямъ.

1. По тремъ даннымъ угламъ A, B, C треугольникъ рѣшенъ быть не можетъ, и задача остается *неопредѣленною*.

2. При данныхъ двухъ углахъ и сторонѣ получаются слѣдующія сочетанія по три.

a, A, B	b, A, B	c, A, B
a, A, C	b, A, C	c, A, C
a, B, C	b, B, C	c, B, C.

Но для рѣшенія все равно, будутъ ли кромѣ извѣстной стороны даны углы A и B, или A и C, или B и C, потому что въ каждомъ изъ этихъ случаевъ третій уголъ найдется по формулѣ $A + B + C = 2d$, слѣдовательно, зная два угла въ треугольникѣ, всегда опредѣлимъ третій, а потому исчисленные нами девять случаевъ приводятся къ одному.

3. Если даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, то получаемъ слѣдующія сочетанія:

$a, b, A \qquad a, c, A \qquad b, c, B;$

$a, b, B \qquad a, c, C \qquad b, c, C.$

Всѣ эти случаи рѣшаются по одной и той же формулѣ.

4. Двѣ стороны и уголъ между ними даютъ слѣдующія сочетанія:

$a, b, C \qquad a, c, B \qquad b, c, A,$

и рѣшаются помощію одной и той же формулы

5 При заданіи трехъ сторонъ можетъ быть одинъ только случай: a, b, c.

Для рѣшенія треугольника по которому нибудь изъ этихъ заданій, должно прежде отыскать ту формулу, которая показывала бы взаимную связь между данными и искомыми величинами, и потомъ уже по первымъ опредѣлять послѣднія.

Задача 1.

Вычислить косвенноугольный треугольникъ по сторонѣ c и по двумъ угламъ A и B, къ ней прилежащимъ

Рѣшеніе. Уголъ $C = 180° - (A + B)$.

$a : c = \text{Sin } A : \text{Sin } C$, откуда $a = \dfrac{c.\ \text{Sin } A}{\text{Sin } C}$,

$b : c = \text{Sin } B : \text{Sin } C$, откуда $b = \dfrac{c.\ \text{Sin } B}{\text{Sin } C}$.

Численный примѣръ

Пусть $c = 376$, $A = 48°\ 3'$ и $B = 40°\ 14'$.
Найдемъ $C = 180° - 88°\ 17' = 91°\ 43'$.

Вычисленіе безъ логариѳмовъ (приблизительно).

$$a = \frac{c.\ \text{Sin } A}{\text{Sin } C} = \frac{376 \times 0{,}743728}{0{,}999550} = \frac{376 \times 744}{1000} = 279{,}74;$$

$$b = \frac{c.\ \text{Sin } B}{\text{Sin } C} = \frac{376 \times 0{,}645902}{0{,}999550} = \frac{376 \times 646}{1000} = 242{,}9.$$

Вычисленіе помощію логариѳмовъ.

Вычисленіе стороны a.

$\log 376 = 2{,}575188$
$\log \text{Sin } 48°\ 3' = 9{,}871414 - 10$
$\log' \text{Sin } 91°\ 43' = 0{,}000195$

$\log a = 2{,}446797$
$a = 279{,}76$

Вычисленіе стороны b.

$\log 376 = 2{,}575188$
$\log \text{Sin } 40°\ 14' = 9{,}810167 - 10$
$\log' \text{Sin } 91°\ 45' = 0{,}000195$

$\log b = 2{,}385550$
$b = 242{,}97$

Прибавленіе. Если въ треугольникѣ даны сторона и два угла, изъ которыхъ одинъ противолежитъ данной сторонѣ, а другой ей прилежитъ, то вычисленіе производится почти такимъ же образомъ: сложивъ два данные угла, и вычтя ихъ сумму изъ $180°$, получимъ третій уголъ, который прилежитъ данной сторонѣ; остальныя части вычисляются какъ и въ предыдущей задачѣ.

Примѣры для упражненія.

1) Данныя:	$c=400$;	$A=36°40'$;	$B=79°50'$.
Искомыя:	$C=63°30'$;	$a=266,9$;	$b=439,04$.
2) Данныя:	$a=97$;	$B=23°3'3''$;	$C=27°15'9''$.
Искомыя:	$A=129°41'48''$,	$b=49,362$;	$c=57,7273$.
3) Данныя:	$a=8745,657$;	$B=28°48'53'',6$,	$C=112°34'57'',42$.
Искомыя:	$A=38°36'8'',98$;	$b=6756,133$,	$c=12942,65$.

Задача 2.

Даны двѣ стороны a и b, и уголъ A противолежащій одной изъ нихъ, вычислить треугольникъ.

Рѣшеніе. Для вычисленія угла B имѣемъ $a \cdot b = \text{Sin}\, A \,.\, \text{Sin}\, B$, откуда $\text{Sin}\, B = \frac{b\, \text{Sin}\, A}{a}$. Зная уголъ B, получимъ

$$C = 180° - (A + B).$$

Наконецъ $c : a = \text{Sin}\, C : \text{Sin}\, A$, слѣд. $c = \frac{a . \text{Sin}\, C}{\text{Sin}\, A}$.

Изслѣдованіе.

Такъ какъ уголъ B изъ первой формулы опредѣляется по синусу, которому, при данной его величинѣ, могутъ соотвѣтствовать два угла исполнительные до $180°$, то и остается *неопредѣленнымъ*, который изъ отысканныхъ угловъ, *острый* или *тупой* долженъ быть выбранъ для рѣшаемаго треугольника?

Но какъ и уголъ C, а слѣдовательно и сторона c находятся въ зависимости отъ угла B, то для каждой изъ нихъ получимъ также по двѣ величины, поэтому найдутся два треугольника, одинъ *остроугольный*, а другой *тупоугольный*, которымъ и будутъ соотвѣтствовать двѣ найденныя величины для угла B.

Сомнѣніе въ выборѣ искомыхъ величинъ исчезаетъ, если данный уголъ противолежитъ большей сторонѣ; потому что если $a > b$, то и $A > B$, слѣдовательно будетъ ли уголъ A тупой, прямой или острый, — уголъ B во всякомъ случаѣ будетъ острый.

Если по вычисленіи получится, что $\operatorname{Sin} B = 1$, то треугольникъ *прямоугольный*, если же $\operatorname{Sin} B > 1$, то треугольникъ *невозможенъ* (§ 11, зад. 4. примѣч.), впрочемъ этотъ послѣдній результатъ можетъ быть только при $a < b$. Если бы сторона a была болѣе b, то и подавно $a > b \operatorname{Sin} A$, а потому выраженіе $\frac{b \operatorname{Sin} A}{a} = \operatorname{Sin} B$ было бы правильною дробью.

И такъ, если $a > b$, то одинъ изъ отысканныхъ треугольниковъ во всякомъ случаѣ *возможенъ* Тоже самое видно изъ геометрическаго построенія треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и по углу, противолежащему одной изъ нихъ.

Геометрическое построеніе и изслѣдованіе по чертежу.

Задача. По даннымъ двумъ сторонамъ a и b и по углу A построить треугольникъ

Рѣшеніе Пусть $a < b$.

На одной изъ сторонъ AM даннаго угла (черт. 20) отложивъ $AC = b$, изъ точки C на другую сторону опущу перпендикуляръ CD. Точку C взявъ за центръ, стороною a какъ радіусомъ опишу дугу. При этомъ могутъ быть слѣдующіе случаи·

$$1)\ a < CD, \quad 2)\ a = CD, \quad 3)\ a > CD$$

При первомъ изъ этихъ предположеній дуга pq не пересѣчетъ стороны AN, и потому треугольникъ *невозможенъ*.

При второмъ предположеніи дуга $p'q'$ коснется прямой AN въ точкѣ D, и получится *одинъ* только треугольникъ CAB удовлетворяющій требованію, который будетъ *прямоугольный*

Наконецъ, если $a > CD$, то дуга $p''q''$ пересѣчетъ прямую AN въ двухъ точкахъ B_1 и B_2 и получатся *два* треугольника, одинъ CAB_1 *тупоугольный* при точкѣ B_1 и другой CAB_2, у котораго при точкѣ B_2 уголъ *острый*

Если $a = b$, то получится только одинъ треугольникъ CAB_3, который будетъ *равнобедренный*, и тогда уголъ B уже извѣстенъ, потому что онъ равенъ A.

Наконецъ, если $a > b$, то получатся двѣ точки пересѣченія B_4 и B_5, соединивъ каждую изъ нихъ съ точкою C, получимъ только *одинъ* треугольникъ удовлетворяющій требованію. Треугольникъ же CAB_5 требованію не удовлетворяетъ, потому что хотя имѣетъ двѣ данныя стороны $AC = b$ и $CB_5 = a$, но не имѣетъ даннаго остраго угла CAN.

Изслѣдованія по формулѣ синусовъ.

Всѣ эти случаи могутъ быть объяснены помощію изслѣдованія формулы $\operatorname{Sin} B = \frac{b.\operatorname{Sin} A}{a}$, служащей для опредѣленія угла, противолежащаго другой данной сторонѣ.

1) *Если* $b < a$, то задача всегда возможна и имѣетъ *одно рѣшеніе*. При этомъ и $\angle B < \angle A$, а потому уголъ $180° - B$ рѣшенію соотвѣтствовать не можетъ.

Если $\angle A$ острый, то и B острый, который находимъ по таблицамъ; если A тупой, то для B нельзя взять $180° - B$, потому что тогда въ треугольникѣ было бы два тупыхъ угла.

2) *Если* $b = a$, то треугольникъ равнобедренный; одно рѣшеніе.

3) *Если* $b > a$, то можетъ быть:

$b \operatorname{Sin} A > a$, случай *невозможнаго* заданія..

$b. \operatorname{Sin} A = a$, слѣдовательно $\angle B$ прямой, а потому a есть катетъ, а b гипотенуза.

$b. \operatorname{Sin} A < a$, задача возможна, если $\angle A$ острый, тогда найденный уголъ $B > A$, и исполнительный ему тупой уголъ $180° - B > A$; поэтому для B получаются *два рѣшенія*.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ $b . \operatorname{Sin} A$ выражаетъ величину перпендикуляра CD, опущеннаго изъ вершины угла C, содержимаго между данными сторонами.

Совокупность всѣхъ различныхъ заданій по двумъ сторонамъ треугольника и по углу противолежащему меньшей сторонѣ составляетъ, такъ называемые, *сомнительные случаи* рѣшенія треугольниковъ.

Далѣе, въ прибавленіяхъ, мы предложимъ аналитическое изслѣдованіе этой задачи, основанное на вычисленіи стороны c.

Численный примѣръ. Пусть $a = 48{,}3$, $b = 32{,}5$ и $A = 86°47'2''$.

Вычисленіе угла B.

по формулѣ $\operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{a}$

$$\log b = 1{,}511883$$
$$\log \operatorname{Sin} A = 9{,}999315 - 10$$
$$\log' a = 8{,}316053$$
$$\log \operatorname{Sin} B = 9{,}827251 - 10$$
$$B = 42°\,12'\,27'' \text{ или } 137°\,47'\,33''$$

Вычисленіе угла C.

$C = 180° - (A + B) = 51°0'31''$.

Вычисленіе стороны c

по формулѣ $c = \frac{\operatorname{Sin} C.\ a}{\operatorname{Sin} A}$.

$$\log a = 1{,}683947$$
$$\log \operatorname{Sin} C = 9{,}890555 - 10$$
$$\log' \operatorname{Sin} A = 0{,}000685$$

Но какъ $b < a$, по заданію, то и $\angle B$ долженъ быть менѣе A, слѣдовательно уголъ B можетъ быть только острый, т. е.

$$42^\circ\ 12'\ 27''.$$

слѣд. $\log c = 1{,}575187$.

откуда $c = 37{,}5999 . = 37{,}6$.

Примѣчаніе. Предлагаемъ учащимся произвести эти вычисленія безъ помощи логариѳмовъ.

Примѣръ 2. Пусть $a = 460$; $b = 654$; $A = 35^\circ\ 12'$, слѣдовательно данный уголъ противолежитъ меньшей сторонѣ (см. изслѣдованіе этой задачи, примѣръ 1).

Рѣшеніе. Если по этимъ даннымъ произведемъ построеніе, то получимъ *два треугольника* ACB_1 и ACB_2 (черт 20), въ которыхъ

$$\angle CB_1A + \angle CB_2A, = 180^\circ,$$

потому что уголъ CB_1B_2 = углу CB_2B_1 откуда $\angle CB_1A = 180^\circ - CB_2A$.

Вычисленіе $\triangle CB_2A$.

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin} A . b}{a} = \frac{\operatorname{Sin} 35^\circ 12' \times 654}{460}.$$

$\log \operatorname{Sin} 35^\circ 12' = 9{,}760748 - 10$

$\log 654 = 2{,}815578$

$\log' 460 = 7{,}337242 - 10$

$\log \operatorname{Sin} B = 9{,}913568 - 10$

$B = CB_2A = 55^\circ 2' 18''$

$A = 35^\circ 12' 0''$

$A + B_2 = 90^\circ 14' 18''$

$\angle ACB_2 = 89^\circ 45' 42''$

Вычисленіе стороны $c_2 = AB_2$

по уравненію $c_2 = \dfrac{a . \operatorname{Sin} ACB_2}{\operatorname{Sin} A}$

$\log \operatorname{Sin} 89^\circ 45' 42'' = 9{,}999996$

$\log 460 = 2{,}662758$

$\log' \operatorname{Sin} 35^\circ 12' = 0{,}239252$

$\log c_2 = 2{,}902006$

$AB_2 = c_2 = 798{,}00.$

Вычисленіе $\triangle CB_1A$.

$\angle CB_1A = 124^\circ 57' 42''$

$A = 35^\circ 12'\ 0''$

$A + B_1 = 160^\circ\ 9' 42''$

$ACB_1 = 19^\circ 50' 18''.$

Вычисленіе $c_1 = AB$.

$$c_1 = \frac{a . \operatorname{Sin} ACB_1}{\operatorname{Sin} A}$$

$\log \operatorname{Sin} 19^\circ 50' 18'' = 9{,}530670$

$\log 460 = 2{,}662758$

$\log' \operatorname{Sin} 35^\circ 12' = 0{,}239252$

$\log c_1 = 2{,}432680$

$AB_1 = c_1 = 270{,}8.$

Примѣч. Сторона c можетъ быть вычислена независимо отъ угловъ B и C.

Рѣшая уравненіе $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$ относительно величины c, какъ неизвѣстной, получимъ $c = b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \operatorname{Cos}^2 A}$.

или $c = b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{Sin}^2 A}$.

Хотя окончательный выводъ и неудобенъ для непосредственнаго логариѳмическаго вычисленія, но изъ него весьма легко вывести условія возможности, невозможности и двойственности при рѣшеніи треугольниковъ. (Подробное изслѣдованіе этой формулы см. далѣе, на концѣ книги, прибавленіе 1-ое).

Примѣры для упражненій.

1) Данныя: $a=265,2$; $b=298,74$; $A=60°15'22''$.

Искомыя: $B=77°58'30''$; $C=41°46'8''$; $c=203,46$.
$B_{,}=102°1'30''$; $C_{,}=17°43'8''$; $c_{,}=92,96$

2) Данныя: $a=200,3$; $b=1208,7$; $B=60°29'11''$.

Искомыя: $c=1294,8$; $A=8°17'30''$; $C=111°13'19''$.

3) Данныя: $a=948,234$; $b=1257,572$, $A=12°43'26'',15$.

Искомыя: $B=16°18'30''$; $C=151°28'4''$; $c=2139,14$.
$B_{,}=163°41'30''$; $C_{,}=4°5'4''$; $c_{,}=318,98$.

Задача 3.

Вычислить треугольникъ по двумъ сторонамъ a ***и*** b, ***и по углу*** C, ***между ними.***

Рѣшеніе. Помощію формулы $a+b:a-b=\text{Cotang}\,\frac{1}{2}C\,.\,\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$

получимъ $\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\text{Cotang}\,\frac{1}{2}C\,.\,(a-b)}{a+b}$ . . . . . . (a)

слѣдоват. $\log\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)=\log\text{Cotg}\,\frac{1}{2}C+\log(a-b)+\log'(a+b)$, откуда опредѣляемъ $\frac{1}{2}(A-B)$ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ. Но $A+B=180°-C$, или $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, слѣдовательно будетъ извѣстна и $\frac{1}{2}(A+B)$.

Полагая $\frac{1}{2}(A+B)=m$, $\frac{1}{2}(A-B)=n$ через сложеніе и вычит. найдемъ $A=m+n$, $B=m-n$.

Зная углы A, B и C, можемъ вычислить и сторону c, помощію одной изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\log c=\log a+\log\text{Sin}\,C+\log'\text{Sin}\,A, \text{ или}$$
$$\log c=\log b+\log\text{Sin}\,C+\log'\text{Sin}\,B$$

Численный примѣръ. Пусть $a=246956$, $b=163927$, $C=113°16'27''$.

Рѣшеніе. $a+b=410883$; $a-b=83029$; $\frac{1}{2}C=56°38'13'',5$

Вычисленіе угловъ A и B.	*Вычисленіе стороны c.*
$\log\text{Cotang}\,\frac{1}{2}C=9,818523-10$	$\log b=5,214650$
$\log(a-b)=4,919230$	$\log\text{Sin}\,C=9,963138$
$\log'(a+b)=4,386282-10$	$\log'\text{Sin}\,B=0,361533$
$\log\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)=9,124035-10$	$\log c=5,539321$
$\frac{1}{2}(A-B)=7°34'44'',5$	$c=346195,4$.
$\frac{1}{2}(A+B)=33°21'46'',5$	
$A=40°56'31''$	
$B=25°47'2''$.	

Примѣръ 2. Пусть дано: $b = 32,5$; $c = 37,6$, $A = 86°47'2''$.

Рѣшая по формуламъ $\mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}\ (C - B) = \frac{c - b}{c + b}\ \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}\ A$

и $\frac{1}{2}\ (C + B) = 90° - \frac{1}{2}\ A$, получимъ

$B = 42°\ 12'\ 27''$.

$C = 51°\ \ 0'\ 31''$.

Вычисляя сторону a по формуламъ вспомогательныхъ угловъ (§ 12, о вспомогательныхъ углахъ 6, α, β) $a = \frac{b - c}{\mathrm{Cos}\varphi}$,

причемъ $\mathrm{Tg}\ \varphi = \frac{2\sqrt{b\ c}\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}\ A}{b - c}$, или по формулѣ синусовъ, получимъ $a = 48,3$.

Примѣч. 1. Если бы въ послѣдней задачѣ требовалось опредѣлить только одинъ изъ угловъ, напримѣръ B, то вычисленіе могло бы быть произведено по формулѣ $\mathrm{Tang}\ B = \frac{b\ \mathrm{Sin}\ A}{c - b\ \mathrm{Cos}\ A}$ (§ 12, теорема 2), разлагая ее на двѣ логариѳмическія, нашли бы $\mathrm{Tang}\ B = \frac{\mathrm{Sin}\ A\ \ \mathrm{Sin}\ y}{\mathrm{Sin}\ (A - y)}$, причемъ $\mathrm{Tang}y = \frac{b\ \mathrm{Sin}\ A}{c}$
(См. § 12, о вспомогательныхъ углахъ, 7).

Примѣч 2. Если бы требовалось опредѣлить только одну сторону a, то вычисленіе могло бы быть произведено по формулѣ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \mathrm{Cos}\ A,$$

обративъ ее сперва въ логариѳмическую.

Примѣры для упражненій

1)	Данныя: $a = 680$;	$b = 300$;	$C = 64°20'$.
	Искомыя. $A = 71°28'1''$;	$B = 44°11'59''$,	$c = 646,426$.
2)	Данныя: $a = 3143,42$;	$b = 1348,12$.	$C = 80°31'$
	Искомыя: $A = 75°0'35''$,	$B = 24°28'25''$,	c 3209,69
3)	Данныя: $a = 0,1527$;	$b = 0,4$;	$C = 60°$.
	Искомыя: $A = 22°13'29''$;	$B = 97°46'31''$;	$c = 0,3496$.

Задача 4.

По тремъ сторонамъ a, b, c вычислить треугольникъ

Рѣшеніе. Искомыя A, B, C могутъ быть опредѣлены по слѣдующимъ формуламъ:

1) Безъ помощи таблицъ логариѳмовъ:

Если стороны даннаго треугольника выражены не въ большихъ числахъ, то вычисленіе можетъ быть произведено по формулѣ $\mathrm{Cos}\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Пусть $a = 76;\ b = 97;\ c = 58,$

то $a^2 = 5776;\ b^2 = 9409;\ c^2 = 3364,\ 2bc = 11252,$

а потому $\mathrm{Cos}\,A = \dfrac{9409 + 3364 - 5776}{11252} = \dfrac{6997}{11252};$

$$\mathrm{Cos}\,A = 0{,}621845;\ A = 51°32'50''.$$

Иногда преобразуютъ эту формулу слѣдующимъ образомъ:

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+a)(b-a)}{2bc} + \frac{c^2}{2bc}$$

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{173 \times 21}{11252} + \frac{3364}{11252} = \frac{6997}{11252}.$$

2) Если же числа велики, то вычисленіе гораздо удобнѣе производится помощію логариѳмическихъ формулъ:

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};\quad \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

Откуда $\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\left[\log(p-b) + \log(p-c) + \log' b + \log' c\right];$

$$\log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\left[\log p + \log(p-b) + \log' a + \log' c\right];$$

$$\log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log' p + \log'(p-c)\right].$$

Численный примѣръ.

Пусть даны: $a = 1753;$ то $\log a = 3{,}243782;$

$b = 3251;$ $\log b = 3{,}512017;$

$c = 2846;$ $\log c = 3{,}454235.$

$2p = 7850;$

$p = 3925;$ $\log p = 3{,}593840,$

$p - a = 2172;$ $\log(p-a) = 3{,}336860;$

$p - b = 674;$ $\log(p-b) = 2{,}828660;$

$p - c = 1079;$ $\log(p-c) = 3{,}033021.$

Вычисленіе угла A.	*Вычисленіе угла B.*
$\log(p-b) = 2{,}828660$	$\log p = 3{,}593840$
$\log(p-c) = 3{,}033021$	$\log(p-b) = 2{,}828660$
$\log' b = 6{,}487983 - 10$	$\log' a = 6{,}756218 - 10$
$\log' c = 6{,}545765 - 10$	$\log' c = 6{,}545765 - 10$
$18{,}895429 - 20$	$19{,}724483 - 20$
$\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = 9{,}447714 - 10$	$\log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B = 9{,}862241 - 10$
$\tfrac{1}{2}A = 16°16'54'';$	$\tfrac{1}{2}B = 43°15'56'';$
$A = 32°33'48''$	$B = 86°31'52''.$

Вычисленіе угла C.

$$\begin{aligned} \log(p-a) &= 3{,}336860 \\ \log(p-b) &= 2{,}828660 \\ \log' p &= 6{,}406160-10 \\ \log'(p-c) &= 6{,}966979-10 \\ \hline & 19{,}538659-20 \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \log \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} C &= 9{,}769329-10 \\ \tfrac{1}{2} C &= 30^\circ 27' 10''; \\ C &= 60^\circ 54' 20''. \end{aligned}$$

Вычисленія эти могутъ быть произведены и помощію слѣдующихъ формулъ:

$$\operatorname{Sin} A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{bc}\sqrt{M};$$

$$\operatorname{Sin} B = \frac{2}{ac}\sqrt{M};$$

$$\operatorname{Sin} C = \frac{2}{ab}\sqrt{M};$$

$$\begin{aligned} \log p &= 3{,}593840 \\ \log(p-a) &= 3{,}336860 \\ \log(p-b) &= 2{,}828660 \\ \log(p-c) &= 3{,}033021 \\ \hline \log M &= 12{,}792381 \\ \log\sqrt{M} &= 6{,}396190 \\ \log 2 &= 0{,}301030 \\ \log' b &= 6{,}487983-10 \\ \log' c &= 6{,}545765-10 \\ \hline \log \operatorname{Sin} A &= 9{,}730968-10 \\ A &= 32^\circ 33' 48''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sqrt{M} &= 6{,}396190 \\ \log 2 &= 0{,}301030 \\ \log' a &= 6{,}756218-10 \\ \log' b &= 6{,}487983-10 \\ \hline \log \operatorname{Sin} C &= 9{,}941421-10 \\ C &= 60^\circ 54' 20''. \end{aligned}$$

Такъ же найдемъ, что $B = 86^\circ 31' 52''$.

Но какъ уголъ B есть большій и притомъ близокъ къ 90°, то вычисленіе его въ синусахъ по шестизначнымъ таблицамъ не дастъ совершенно точнаго результата: разность между отысканнымъ угломъ и истиннымъ можетъ быть на нѣсколько секундъ, поэтому лучше вычислять его послѣднимъ, т. е помощію угловъ A и C.

Примѣчаніе. Повѣрка всѣхъ случаевъ при рѣшеніи косвенноугольныхъ треугольниковъ можетъ быть весьма удобно произведена помощію формулъ Мольвейде.

§ 14.

Частные случаи при рѣшеніи треугольниковъ. Вычисленіе площадей треугольниковъ прямоугольныхъ и косвенноугольныхъ. Задачи.

Треугольники равнобедренные и равносторонніе.

Въ геометріи доказано, что во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (черт. 21) равнымъ сторонамъ противолежатъ равные углы и обратно, рав-

нымъ угламъ противолежатъ равныя стороны, т. е. что если $AC = CB$, то и $\angle A = \angle B$, и обратно.

Но такъ какъ $C + 2A = C + 2B = 2d$, то по данному C получимъ $A = B = \frac{2d - C}{2}$; а если данъ A, или B, то

$$C = 2(d - A) = 2(d - B).$$

Равнобедренный треугольникъ опредѣляется по слѣдующимъ даннымъ:

1) По основанію и ребру.

2) По основанію и углу, двумя способами, а именно:

a) по основанію и углу прилежащему, или

b) по основанію и углу противолежащему.

3) По ребру и углу, двумя способами, а именно:

a) по ребру и углу при основаніи,

b) по ребру и углу при вершинѣ.

Всѣ эти случаи приводятся къ рѣшенію прямоугольныхъ треугольниковъ, которые получатся, если опустимъ перпендикуляръ на основаніе изъ вершины угла, содержимаго между равными сторонами.

Примѣръ 1. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC даны основаніе $c = 2347,5$ и ребро $b = 7698,2$. Опредѣлить прочія части.

Рѣшеніе. Опустивъ перпендикуляръ CD, для отысканія угла при основаніи, получимъ $\operatorname{Cos} A = \frac{AD}{AC}$; $\operatorname{Cos} A = \frac{\frac{1}{2}c}{b} = \frac{c}{2b}$, слѣд.

$$\log \operatorname{Cos} A = \log c + \log' 2 + \log' b \text{ или}$$
$$\log \operatorname{Cos} A = \log c - (\log 2 + \log b).$$

Вычисляя, получимъ $\log \operatorname{Cos} A = 9,183186$, откуда $A = 81°13'47'',5$.

Уголъ $C = 2(d - A) = 2(90° - 81°13'47'',5) = 17°32'25''$.

Примѣръ 2. Въ равнобедренномъ треугольникѣ дано основаніе $c = 7462$ и прилежащій къ нему уголъ $A = 57°43'10''$. Опредѣлить прочія части

Рѣшеніе Уголъ $C = 2(d - A) = 64°33'40''$.

Нашли также (см. предыдущій примѣръ), что

$$\operatorname{Cos} A = \frac{c}{2b}, \text{ откуда } b = \frac{c}{2 \operatorname{Cos} A}, \text{ слѣдовательно}$$

$\log b = \log c - (\log 2 + \log \operatorname{Cos} A)$; вычисляя, получимъ

$\log b = 3,844230$; откуда $b = 6986,03$.

Примѣръ 3. Въ треугольникѣ ABC даны стороны $a = b$, и уголъ C между ними. Чему равны прочія части?

Рѣшеніе Приложивъ формулу

$$a + b \,.\, a - b = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B) : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B),$$

получимъ $\quad a - b = 0$, слѣд $\tfrac{1}{2}(A - B) = 0$,

откуда $\quad A = B = 90° - \tfrac{1}{2}C.$

Для опредѣленія стороны c, получимъ $\dfrac{a\,\text{Sin}\,C}{\text{Sin}\,A}$;

но $\quad \text{Sin}\,C = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C\,.\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}C$, притомъ

$\text{Sin}\,A = \text{Sin}(90° - \tfrac{1}{2}C) = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}C$,

слѣдоват. $c = 2a\ \ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C$.

Тоже самое выводится изъ чертежа, помощію прямоугольныхъ треугольниковъ ACD и DCB.

Задачи для упражненія.

1) Дано ребро $b = 8276,5$ и уголъ при вершинѣ $C = 82°24'12''$. Вычислить прочія части.

Рѣшеніе. $A = B = 48°47'54''$, $c = 10903,65$.

2) Дано основаніе $c = 79002,3$ и ребро $a = 105704,3$.

Чему = уголъ при вершинѣ?

Рѣшеніе. $C = 43°51'40''$.

3) Въ равнобедренномъ треугольникѣ дано основаніе $c = 8777,58$ и уголъ $C = 53°24'30''$. Чему = прочія части?

Рѣшеніе. $A = B = 63°17'45''$, $b = 9766,256$

Примѣчаніе Кромѣ того есть случаи, не требующіе тригонометрическаго рѣшенія, но съ большими удобствами рѣшаемые по пріемамъ и формуламъ первоначальной геометріи, а именно:

1) Если одинъ изъ угловъ, напр B прямоугольнаго треугольника равенъ $30°$, то $C = 60°$ (черт 16) Полагая $AC = b$ получимъ, что $BC = a = 2b$, а сторона $AB = c$, прилежащая углу въ $30°$, найдется по пиѳагоровой теоремѣ $\overline{AB}^2 = BC^2 - AC^2 = 3b^2$, а потому $c = b\sqrt{3} = b \times 1,73205$

2) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ, при углѣ въ $30°$, извѣстна сторона c, прилежащая этому углу, то изъ предыдущихъ формулъ получимъ.

$$b = \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{c}{1,73205};\ a = 2b;\ C = 60°.$$

Если даны: гипотенуза a, и уголъ $B=30°$, то $C=60°$, $b=\frac{1}{2}a$; $c=b\sqrt{3}=b\ 1,73205$.

Также если гипотенуза вдвое болѣе катета, то уголъ противолежащій меньшей изъ данныхъ сторонъ, равенъ 30°, а уголъ между данными сторонами равенъ 60°.

4) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ угловъ $B=45°$, то и другой острый уголъ $C=45°$, слѣд. треугольникъ есть равнобедренный прямоугольный, въ которомъ $b=c=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=\frac{1}{2}a\ .\ 1,414=a\ .\ 0,707$.

5) Бо́льшую часть задачъ, относящихся къ рѣшенію равностороннихъ треугольниковъ можно также рѣшать безъ помощи тригонометрическихъ величинъ. Обозначивъ сторону равносторонняго треугольника черезъ a, высоту черезъ h, получимъ

$$\left.\begin{aligned} h &= a\sqrt{\tfrac{3}{4}} = a\ .\ 0,866025 \\ a &= h\sqrt{\tfrac{4}{3}} = h\ .\ 1,154701 \end{aligned}\right\}$$ Притомъ каждый изъ угловъ равностор. треуг. равенъ 60°.

Площади прямоугольныхъ треугольниковъ.

1) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ даны двѣ стороны, прилежащія прямому углу, то обозначивъ черезъ F площадь треугольника ABC, прямоугольнаго при A, получимъ $F=\frac{bc}{2}$.

Численный примѣръ. Если $c=13,45$ и $b=15,32$,
то $\log F=\log 13,45+\log 15,32+\log' 2$, слѣд. $F=103,02$.

2) Если дана гипотенуза a и сторона c, то площадь треугольника

$$F=\frac{bc}{2},\ \text{но}\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)},$$

слѣдовательно $$F=\tfrac{1}{2}c\sqrt{(a+c)(a-c)}.$$

Численный примѣръ. Пусть $a=212,17$; $c=97,23$;

то
$$\begin{aligned} \log 97,23 &= 1,987800 \\ \tfrac{1}{2}(\log 309,4+\log 114,94) &= 2,275496 \\ \log' 2 &= 9,698970-10 \\ \hline \log F &= 3,962266,\ F=9167,8 \end{aligned}$$

3) Если даны: гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ B, то

$$F=\tfrac{1}{4}a^2\operatorname{Sin} 2B$$

Доказательство. $F=\frac{1}{2}bc$; но $b=a\operatorname{Sin}B$, $c=a\operatorname{Cos}B$,

слѣдоват. $$F=\frac{a^2\operatorname{Sin}B\operatorname{Cos}B}{2}=\frac{a^2\ .\ 2\operatorname{Sin}B\operatorname{Cos}B}{4}=\frac{a^2\operatorname{Sin}2B}{4}.$$

Численный примѣръ. Если $a = 162,14$; $B = 14°7'8''$, то

$$\log F = 2 \log a + \log \mathrm{Sin}\, 2B + \log' 4.$$

Но $2 \log 162,14 = 4,419780$

$\log \mathrm{Sin}\, 28°14'16'' = 9,674982 - 10$

$\log' 4 = 9,397940 - 10$

$\log F = 3,492702;$

откуда $F = 3109,58.$

4) Въ прямоугольномъ ΔABC даны катетъ c и прилежащій острый уголъ B; чему $= F$?

Рѣшеніе. $F = \frac{bc}{2}$, но $b = c \,\mathrm{Tang}\, B$,

слѣдовательно $F = \frac{1}{2} c^2 \,\mathrm{Tang}\, B.$

А потому, если даны b и прилежащій уголъ C, то

$$F = \tfrac{1}{2} b^2 \,\mathrm{Tang}\, C$$

Численный примѣръ. Пусть $c = 9,37$; $B = 6°4'13''$.

$$\log F = 2 \log 9,37 + \log \mathrm{Tang}\, 6°4'13'' + \log' 2,$$

слѣдовательно $\log F = 0,669164$; откуда $F = 4,668.$

5) Въ данномъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC данъ катетъ c и уголъ C, ему противолежащій. Чему $= F$?

Рѣшеніе. $F = \frac{bc}{2}$, но $b = \frac{c}{\mathrm{Tang}\, C} = c \,.\, \mathrm{Cotg}\, C$,

подставивъ, получимъ $F = \frac{c^2}{2 \,\mathrm{Tang}\, C} = \frac{c^2 \,\mathrm{Cotg}\, C}{2}.$

Численный примѣръ Пусть $c = 12,14$, $C = 15°13'11''$, то получимъ

$$\log F = 2 \log 12,14 + \log \mathrm{Cotg}\, 15°13'11'' + \log' 2,$$

$$\log F = 2,432737, \text{ откуда } F = 270,85.$$

Площади косвенноугольныхъ треугольниковъ.

Задача 6. По двумъ сторонамъ b и c и углу между ними вычислить площадь треугольника.

Рѣшеніе. На одну изъ данныхъ сторонъ, напр. c, изъ вершины противолежащаго угла C опустивъ перпендикуляръ CD, получимъ $CD = b \,\mathrm{Sin}\, A$; слѣдовательно

$$F = \text{площ } \Delta ABC = \frac{c \,.\, CD}{2} = \frac{bc \,\mathrm{Sin}\, A}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

т. е. что *площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ*

сторонъ этого треугольника, умноженной на синусъ угла, заключеннаго между ними. Откуда

$$\log F = \log b + \log c + \log \operatorname{Sin} A + \log' 2.$$

Примѣръ 1. Пусть $b = 26,14$; $c = 58,35$, $A = 44°12'$, то

$$\log F = 2,725653, \text{ откуда } F = 531,68.$$

Примѣръ 2. Если $a = 246956$, $b = 163927$; $C = 113°16'27''$, то

$$F = 18594225000 \text{ (зад. 3, § 13).}$$

Понятно, что послѣднія цифры здѣсь не точны, и можно довольствоваться вѣрностію только первыхъ цифръ съ лѣвой стороны, (потому что площадь этого треугольника выражена весьма большимъ числомъ цифръ).

Прибавленіе. Всякій четыреугольникъ діагоналями разсѣкается на четыре треугольника. Приложивъ къ каждому изъ этихъ треугольниковъ выведенныя формулы (α) получимъ, что поверхность каждаго четыреугольника равна половинѣ произведенія діагоналей, помноженному на синусъ угла, заключеннаго между ними

Численный примѣръ. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ даны діагонали $AC = 345,7$; $BD = 294,8$, уг. діагон. $CEB = 27°35'24''$. Чему $=$ площ. четыреугольника?

Рѣшеніе. Площ. четыреугольника $ABCD = 48621,79$.

Задача 7. Вычислить площадь треугольника по сторонѣ треугольника и по двумъ даннымъ угламъ.

Рѣшеніе. Пусть данныя величины: c, B и C. По предыдущей задачѣ получимъ $F = \frac{1}{2} bc \operatorname{Sin} A$, но $b : c = \operatorname{Sin} B : \operatorname{Sin} C$,

слѣдовательно $b = \dfrac{c \,.\, \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C}$; подставивъ, найдемъ

$$F = \frac{c^2 \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B}{2 \operatorname{Sin} C}, \text{ но какъ } \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin}(B + C)$$

то $$F = \frac{c^2 \operatorname{Sin}(B + C) \,.\, \operatorname{Sin} B}{2 \operatorname{Sin} C}; \text{ слѣдовательно}$$

$$\log F = 2 \log c + \log \operatorname{Sin}(B + C) + \log \operatorname{Sin} B + \log' 2 + \log' \operatorname{Sin} C$$

Численный примѣръ. Пусть $B = 44°16'$, $C = 55°13'$ и $c = 136,5$, то $\log F = 3,892605$; откуда $F = 7809,15$

Задача 8. По двумъ сторонамъ и по углу, противолежащему одной изъ нихъ, опредѣлить площадь треугольника.

Рѣшеніе Пусть даны a, b, и A Найдемъ сперва B по формулѣ $\operatorname{Sin} B = \dfrac{b \operatorname{Sin} A}{a}$, тогда извѣстенъ будетъ и уголъ

$$C = 180° - (A + B), \text{ и } \operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin}(A + B);$$

но такъ какъ $F = \dfrac{ab \operatorname{Sin} C}{2}$, или по предыдущей задачѣ,

$$F = \frac{a^2 \operatorname{Sin} B \,.\, \operatorname{Sin} C}{2 \operatorname{Sin} A} = \frac{b^2 \operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Sin} C}{2 \operatorname{Sin} B},$$

то $$F = \frac{a^2 \operatorname{Sin} B . \operatorname{Sin}(A + B)}{2 \operatorname{Sin} A} = \frac{b^2 \operatorname{Sin} A . \operatorname{Sin}(A + B)}{2 \operatorname{Sin} B}.$$

Въ послѣднихъ формулахъ площадь этого треугольника выражена непосредственно помощію данныхъ и угла B.

Примѣчаніе Если, по формулѣ $\operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{a}$, для угла B получатся двѣ величины, то и $A + B$, а потому и $\operatorname{Sin}(A + B)$ будетъ имѣть два значенія, слѣдовательно и для площади получатся также двѣ величины: одна для треугольника остроугольнаго при B, а другая для тупоугольнаго при той же вершинѣ

Численный примѣръ. Пусть даны: $a = 460$; $b = 654$; $A = 35°12'$ (см. зад. 2, § 13). Вычислимъ площ. F.

Рѣшеніе. По формулѣ получимъ (черт 20):

$$\log F = 2 \log a + \log \operatorname{Sin} B + \log \operatorname{Sin} C + \log' 2 + \log' \operatorname{Sin} A;$$

но $B_2 = 55°2'18''$	$B_1 = 124°57'42''$
слѣд. $ACB_2 = 89°45'42''$	и $ACB_1 = 19°50'18''$
$2 \log a = 5,325516$	$2 \log a = 5,325516$
$\log \operatorname{Sin} B_2 = 9,913568 - 10$	$\log \operatorname{Sin} B_1 = 9,913568 - 10$
$\log \operatorname{Sin} ACB_2 = 9,999996 - 10$	$\log \operatorname{Sin} ACB_1 = 9,530670 - 10$
$\log' 2 = 9,698970 - 10$	$\log' 2 = 9,698970 - 10$
$\log' \operatorname{Sin} A = 0,239252$	$\log' \operatorname{Sin} A = 0,239252$
$\log F = 5,177302$	$\log F = 4,707976$
пл. $\Delta ACB_2 = 150419$	пл. $\Delta ACB_1 = 51047,7$
для остроугольнаго при B;	для тупоугольнаго при B.

Оба эти результата повѣряются по формулѣ $F = \frac{1}{2} ab . \operatorname{Sin} C$,

$\angle C = 89°45'42''$	или $\angle C = 19°50'18''$
$\log a = 2,662758$	$\log a = 2,662758$
$\log b = 2,815578$	$\log b = 2,815578$
$\log \operatorname{Sin} C = 9,999996 - 10$	$\log \operatorname{Sin} C = 9,530670 - 10$
$\log' 2 = 9,698970 - 10$	$\log' 2 = 9,698970 - 10$
$\log F = 5,177302$	$\log F = 4,707976$
$F =$ пл. $\Delta ACB_2 = 150419.$	$F =$ пл $\Delta ACB_1 = 51047,7$

Задача 9. По тремъ даннымъ сторонамъ a, b, c вычислить площадь треугольника.

Рѣшеніе Доказано уже, что $F = \frac{1}{2} bc . \operatorname{Sin} A$, но $\operatorname{Sin} A$, выраженный помощію трехъ сторонъ треугольника, равенъ

$\frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, а потому, подставивъ, получимъ

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

отнуда $\log F = \frac{1}{2}[\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)]$.

Примѣчаніе 1. Такъ какъ ни въ данныхъ величинахъ, ни въ искомыхъ, нѣтъ угловъ, то формула эта можетъ быть выведена и безъ помощи тригонометрическихъ величинъ (*).

Примѣчаніе 2. Понятно также, что площадь треугольника равна половинѣ произведенія изъ периметра треугольника на радіусъ круга вписаннаго.

Численный примѣръ. Пусть $a = 1753$, $b = 3251$, $c = 2846$. Чему $= F$? (зад. 4; § 13).

Получимъ $\log[p(p-a)(p-b)(p-c)] = 12{,}792381$

$$\log F = \log\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6{,}396190;$$

отнуда $F = 2489949$.

Примѣры для упражненія.

1) Если $a = 4{,}25$ верст.; $b = 6{,}84$ верст.; $c = 9{,}47$ верст., то $F = 13{,}14$ квадратныхъ верстъ.

2) Въ параллелограммѣ извѣстны діагональ $c = 30{,}48$ саж. и двѣ стороны $a = 15{,}47$ саж. и $b = 23{,}72$ с; то $F = 2$ площ. треугольника, слѣдовательно

$$F = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 361{,}40 \text{ кв. саж.}$$

Примѣчаніе 3. Если перемножимъ формулы синусовъ половинныхъ угловъ треугольника, то получимъ

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \,.\, \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B \,.\, \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{F^2}{pabc}.$$

А перемноживъ косинусы, имѣемъ

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \,.\, \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \,.\, \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C = \frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{pF}{abc}.$$

Наконецъ, перемножая тангенсы тѣхъ же угловъ, найдемъ

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}A \,.\, \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}B \,.\, \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{F}{p^2}.$$

Задача 10. По даннымъ сторонамъ a, b, c треугольника опредѣлить радіусъ круга описаннаго.

Рѣшеніе. Положивъ радіусъ круга описаннаго равнымъ R, получимъ $a = 2R \operatorname{Sin} A$ (зад 3, въ примѣчан. къ § 12);

откуда $R = \frac{a}{2\operatorname{Sin}A}$; помноживъ числителя и знаменателя на bc, а также подставивъ вмѣсто $\operatorname{Sin}A$ величину его, выраженную помощію полупериметра найдемъ

$$R = \frac{abc}{2bc\operatorname{Sin}A} = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

гдѣ F есть площадь треугольника.

(*) См. „Собраніе геометрическихъ задачъ или практическія упражненія въ геометріи“, изданныя мною вмѣстѣ съ г. Гурьевымъ. С. П. Б. 1844 г.

Геометрическія рѣшенія весьма многихъ изъ предложенныхъ въ этой тригонометріи задачъ можно также найти въ сочиненіи «*Собраніе геометрическихъ задачъ, или геометрія древнихъ въ 850-ти задачахъ, сост. Д-ромъ Векелемъ перевед. А. Н. и изданныхъ подъ редакціею А. Дмитріева*».

Задача 11. По даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить радіусъ круга [redacted]

Рѣшеніе. Положивъ радіусъ круга вписаннаго равнымъ r, найдемъ

$$F = r\,\frac{a+b+c}{2} = rp;\ \text{откуда}\ r = \frac{F}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Численный примѣръ.

Полагая $a = 835$; $b = 956$; $c = 730$; получимъ $r = 233{,}5$; $R = 494{,}9$.

§ 15.

Приложеніе тригонометріи къ нѣкоторымъ задачамъ практической геометріи.

Описаніе употребительнѣйшихъ землемѣрныхъ инструментовъ.

Инструменты, наиболѣе употребляемые при дѣйствіяхъ на полѣ, суть

1) *Для тригонометрическихъ работъ:* астролябія, или графометръ, повторительный кругъ, теодолитъ.

2) *Для работъ топографическихъ:* мензула, или геометрическій столикъ, буссоль и земледѣльческій эккеръ.

3) *Для нивеллированія:* нивеллиры разнаго устройства

Кромѣ того, при практическихъ работахъ употребляются: мѣрная цѣпь, колья, масштабъ, транспортиръ, отвѣсъ, ватерпассы: плотничный, или съ отвѣсомъ, и съ воздушнымъ пузырькомъ, ноніусъ, или верньеръ, и т. д., употребленіе которыхъ извѣстно уже изъ практической геометріи. Мы дадимъ понятіе только о главнѣйшихъ инструментахъ.

а) **Астролябія** (черт. 22) состоитъ изъ мѣднаго полукруга, или цѣлаго круга, съ возможною точностію раздѣленнаго на градусы и полуградусы. Къ этому кругу, называемому *лимбомъ*, при точкахъ окружности, означенныхъ $0°$ и $180°$, придѣлываютъ двѣ мѣдныя съ прорѣзами планочки, которыя называются *неподвижными діоптрами*. Въ центрѣ лимба, на шпилькѣ, придѣлывается подвижная металлическая линейка, къ которой также придѣланы діоптры; этотъ вращающійся діаметръ называется *подвижными діоптрами* или *алидадою*. Діоптры служатъ для наблюденія, или для *визированія* предметовъ. Астролябія, смотря по положенію измѣряемаго угла, можетъ быть устанавливаема въ положеніяхъ горизонтальномъ, косвен-

номъ и вертикальномъ. Иногда къ лимбу придѣлываютъ еще магнитную стрѣлку, для опредѣленія полуденной линіи (*), а также ватерпасную трубочку, для обозначенія линіи горизонтальной.

При употребленіи инструмента весь этотъ приборъ, посредствомъ *банштаба* съ мѣднымъ шарикомъ, или такъ называемаго *яблока* и особаго винта, прикрѣпляется къ треногѣ, на которой его и устанавливаютъ, наблюдая притомъ, чтобы центръ лимба находился вертикально надъ вершиною измѣряемаго угла, которая означается на землѣ особымъ колышкомъ. Для показанія вертикальной линіи употребляется *отвѣсъ*, т. е. шнурокъ съ гирькою. Установивъ инструментъ, слегка передвигаютъ лимбъ такъ, чтобы прорѣзы въ неподвижныхъ діоптрахъ проходили черезъ одну сторону измѣряемаго угла, а прорѣзы подвижныхъ діоптровъ черезъ другую: тогда на дугѣ лимба, опредѣляемой разстояніемъ двухъ діоптровъ, и обозначится число градусовъ опредѣляемаго угла. Такъ какъ лимбъ астролябіи обыкновенно бываетъ раздѣленъ только на градусы, то для обозначенія большей точности дѣленій употребляютъ *ноніусъ* или *верніеръ*. Часто вмѣсто діоптровъ, которые неудобны для визированія предметовъ, находящихся на большихъ разстояніяхъ, употребляютъ *кипрегель*, т. е. алидаду со зрительною трубою, или просто зрительныя трубы, имѣющія вращательное движеніе при центрѣ лимба Такимъ образомъ, постепенно улучшая астролябію, сдѣлали незамѣтный переходъ къ болѣе совершеннымъ угломѣрнымъ снарядамъ, т. е. къ *повторительному кругу* и *теодолиту*, которые и употребляются преимущественно при съемкахъ тригонометрическихъ.

b) **Мензула**, или *геометрическій столикъ* (черт. 23), состоитъ изъ доски, квадратной фигуры, величиною съ аршинъ, ровно выструганой, покрытой бумагой и, помощію штатива, прикрѣпленной къ треногѣ Мензула приводится въ горизонтальное положеніе помощію трехъ винтовъ, лежащихъ внѣ центра мензулы; обращеніе же по горизонтальной плоскости производится на такъ называемомъ становомъ винтѣ. Обозначеніе, на мѣрномъ столикѣ, горизонтальныхъ проекцій сторонъ, наносимыхъ угловъ, или треугольниковъ, производится помощію діоптренной линейки, называемой алидадою, или помощію кипрегеля. Для назначенія точекъ стоянія на мѣрномъ столикѣ употребляется отвѣсъ, прикрѣпляемый къ мензульной вилкѣ.

(*) Уголъ отклоненія магнитной стрѣлки отъ меридіана мѣста измѣняется, сообразно съ временемъ года, съ часомъ дня и съ мѣстомъ наблюденія. Для С.-Петербурга склоненіе компаса есть 6° къ западу.

c) **Буссоль** (черт. 24), или компасъ, состоитъ изъ коробки цилиндрической или квадратной фигуры, заключающей въ себѣ, какъ и въ астролябіи, раздѣленный на градусы мѣдный кругъ. Въ центрѣ этого круга находится магнитная стрѣлка на шпилькѣ, около которой стрѣлка можетъ свободно вращаться. Къ коробкѣ придѣланы по діаметру, для визированія, два діоптра. Такъ какъ магнитная стрѣлка, по свойству своему, сохраняетъ одно и то же положеніе (близко подходящее къ полуденной линіи, или меридіану), то очевидно, что, при обращеніи инструмента, направленіе стрѣлки не перемѣнится, но кругъ, по которому вращается инструментъ, измѣнитъ свое положеніе: такимъ-то образомъ и обозначится, на сколько градусовъ, при обращеніи буссоли удалилась стрѣлка отъ первоначальнаго положенія, а черезъ то опредѣлится и величина угла. Компасъ, или магнитная стрѣлка, употребляется также для приблизительной *оріентировки плана*, т. е для отнесенія плана къ странамъ свѣта.

d) **Земледѣльческій эккеръ** (черт 25) состоитъ изъ четырегранной или осмигранной призмы, сдѣланной изъ дерева или листовой мѣди и утвержденной на шестѣ, котораго конецъ, втыкаемый въ землю, заостренъ и окованъ желѣзомъ. Черезъ каждыя двѣ взаимно-параллельныя грани призма перерѣзана наполовину своей длины насквозь, въ родѣ небольшой скважины, чтобы глазъ, приложенный къ какой-либо грани, могъ видѣть предметы, находящіеся за противоположною ей гранью Сквозные прорѣзы имѣютъ то же назначеніе, какъ и діоптры въ астролябіи. Такъ какъ эккеръ обыкновенно бываетъ съ боковъ четырегранный или много, если осмигранный, то понятно, что посредствомъ его можно наносить углы только въ 90° и 45°.

e) **Ватерпассъ** *съ воздушнымъ пузырькомъ* (черт. 26) состоитъ изъ стеклянной трубки, изогнутой въ дугу, съ весьма большимъ радіусомъ кривизны. Трубка эта наполняется окрашеннымъ виннымъ спиртомъ, причемъ оставляютъ въ ней, въ видѣ пузырька, небольшое пустое пространство, которое, понятно, должно занять всегда высшую точку трубки. Очевидно, что при колебаніи этой трубки вдоль, пузырекъ, по легкости своей, будетъ переходить то къ одной, то къ другой оконечности трубки, при горизонтальномъ же положеніи инструмента онъ будетъ занимать средину трубки, обыкновенно обозначаемую особымъ рубчикомъ. Къ мѣдной оправѣ ватерпасса, по краямъ, прикрѣпляются винты, помощію которыхъ инструментъ приводится въ *горизонтальное* положеніе (*)

(*) Для этой же цѣли (въ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется большой точности) употребляется иногда, такъ называемый, *плотничный ватерпассъ*. Устройство этого

f) **Нивеллиръ.** Основная идия, при устройствѣ почти всѣхъ болѣе или менѣе усовершенствованныхъ нивеллировъ, состоитъ въ томъ, что поверхность спокойно стоящей воды всегда принимаетъ положеніе горизонтальное. Нивеллиръ простѣйшаго устройства состоитъ изъ мѣдной цилиндрической трубки (черт. 27), концы которой изогнуты кверху подъ прямымъ угломъ, и оканчиваются стеклянными, трубками, имѣющими равные діаметры. Вода, впущенная въ эту трубку до половины стеклянныхъ оконечностей, останавливается въ обѣихъ сторонахъ трубки на одномъ горизонтѣ. Нивеллиръ со штативомъ насаживается на треногу, высота которой соразмѣряется съ высотою зрѣнія взрослаго человѣка.

Прямая линія, касательная съ обѣихъ сторонъ къ поверхностямъ спокойно стоящей воды, обозначитъ *горизонтальный лучъ зрѣнія*. На продолженіи этой линіи, посредствомъ кольевъ и сажени съ рейкою, можно расположить рядъ точекъ, которыя, сливаясь съ направленіемъ воды, будутъ принадлежать къ искомой *горизонтальной линіи* или *поверхности*.

Примѣчаніе. Съ болѣе точнымъ устройствомъ описанныхъ нами инструментовъ предлагаемъ учащимся ознакомиться при самомъ производствѣ практическихъ работъ (*).

Практическія задачи.

Задача 1. Измѣрить высоту зданія, къ основанію котораго подойти можно.

Рѣшеніе. Выбравъ по возможности ровную и притомъ горизонтальную мѣстность, измѣряютъ прямую AE (черт. 28) и становятся (**) отъ предмета AB на разстояніи приблизительно равномъ высотѣ измѣряемаго зданія (для избѣжанія угловъ слишкомъ тупыхъ или слишкомъ острыхъ). При точкѣ E, помощію какого нибудь угломѣрнаго снаряда, напримѣръ астролябіи, измѣрнютъ уголъ BFJ, котораго одна сторона FB проходила бы черезъ вершину B зданія AB, а другая FJ была параллельна къ мѣстности

инструмента основано на томъ, что отвѣсъ въ спокойномъ состояніи, принимаетъ положеніе вертикальное, линія же или плоскость, перпендикулярная къ вертикальной, называется *горизонтальною*.

(*) Подробныя указанія по этому предмету можно найти въ курсахъ геодезіи, а также въ учебникахъ практической геометріи Болотова, Мейена, Леве, Андреева, Кузнецова, Миквица. Изъ иностранныхъ сочиненій укажемъ на руководства. Francoeur, Serret, Bourgeois et Carabas; Hunäus, Pract. Geom; Barfusz Meszkunde, etc.

(**) Мѣсто, изъ котораго производится измѣреніе, и гдѣ поставленъ угломѣрный инструментъ, называется *станомъ*.

Такъ какъ $AE = JF$, то получимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ BFJ будутъ извѣстны сторона и острый уголъ, а потому $\mathrm{Tang}\, BFJ = \frac{BJ}{FJ}$ откуда $BJ = FJ \,.\, \mathrm{Tang} F$. Къ BJ придамъ EF, получимъ высоту измѣряемаго зданія.

Численный примѣръ.

Пусть $AE = 17{,}6$ саж.; $\angle BFJ = 48°15'20''$ и $FE = 0{,}4$ саж.

$$\log(AE = JF) = 1{,}245513$$
$$\log \mathrm{Tang}\, 48°15'20'' = 10{,}049460 - 10$$
$$\log BJ = 1{,}294973; \text{ откуда}$$

$BJ = 19{,}73$ саж.; слѣд. $AB = 19{,}73 + 0{,}4 = 20{,}13$ саж.

2-й численный примѣръ.

Горизонтальное разстояніе отъ стана до измѣряемаго предмета равно 325 фут.; $\angle BFJ = 25°36'14''$; высота угломѣрнаго снаряда $EF = 4$ ф. Чему $= AB$?

Рѣшеніе. $AB = 159{,}74$ фут.

Прибавленіе. Если измѣряемый предметъ неприступенъ, то на горизонтальной поверхности берутъ два стана K и E, которые находились бы съ измѣряемымъ предметомъ на одной прямой линіи, и измѣривъ разстояніе $KE = LF$, а также углы BFL и BLF, находятъ величину прямой BL; далѣе вычисляютъ треугольникъ BJL по извѣстнымъ BL, $\angle BLJ$ и по углу $BJL = 90°$.

Численный примѣръ.

Если $KE = 791{,}8$ фут., $\angle BLJ = 15°11',8$ и $\angle BFJ = 8°2',4$; то высота измѣряемаго предмета $= 233$ фут.

Задача 2, Найти высоту неприступнаго предмета, напр. высоту горы надъ горизонтальною поверхностію.

Рѣшеніе. Пусть S есть вершина горы. Изъ точки A провожу AB и, измѣривъ ее, принимаю за основаніе (база).

Помощію угломѣрнаго инструмента измѣривъ углы SAB и SBA (черт. 29), найду уголъ ASB, а по пропорціи

$AS : AB = \mathrm{Sin} B : \mathrm{Sin} S$ опредѣлю одну изъ сторонъ AS.

Предположивъ вертикальную плоскость, которая проходила бы черезъ прямую AS, и въ этой плоскости горизонтальную прямую AP и вертикальную SP, получимъ прямоугольный треугольникъ ASP, въ которомъ SP будетъ высотою измѣряемаго предмета.

Но въ прямоугольномъ треугольникѣ ASP, извѣстна AS, изъ треугольника ASB; уголъ же SAP, составленный прямою AS, идущею къ вершинѣ предмета, и горизонтальною AP, можетъ быть опредѣленъ по предыдущей задачѣ, слѣдовательно $SP = AS \operatorname{Sin} SAP$

Численное приложеніе. Пусть $AB = 2356{,}7$ ф ,

$SAB = 63°19'25''$, $SBA = 48°35'42$ и $SAP = 43°19'50''$.

Рѣшеніе. Вычислен. стор. AS	*Вычислен. стор. SP.*
$\log AB = 3{,}372304$	$\log AS = 3{,}279981$
$\log \operatorname{Sin} SBA = 9{,}875092 - 10$	$\log \operatorname{Sin} SAP = 9{,}836455 - 10$
$\log' \operatorname{Sin} ASB = 0{,}032585$	$\log SP = 3{,}116436$
$\log AS = 3{,}279981$	слѣд. $SP = 1307{,}5$ фут.

Задача 3. Извѣстна высота маяка надъ поверхностію моря: съ вершины этого маяка вычислить разстояніе между его основаніемъ и кораблемъ, видимымъ на морѣ.

Рѣшеніе. Измѣряю уголъ $CBD = \alpha$ (черт. 30) между прямую BD и горизонтальною прямою BC (въ той же вертикальной плоскости).

Но $\frac{AD}{AB} = \operatorname{Cotg} ADB = \operatorname{Cotg}\alpha$, слѣдовательно $AD = AB.\operatorname{Cotg}\alpha$;

$\log AD = \log AB + \log \operatorname{Cotg}\alpha$.

Численный примѣръ 1-й.	Численный примѣръ 2-й
Высота $AB = 330$ ф.	Высота $AB = 785$ ф.
$\angle\alpha = 14°41'24''$	$\angle\alpha = 6°14'35''$
Иском. $AD = 1335{,}07$ ф.	$AD = 7175{,}82$ ф.

Задача 4. Найти разстояніе между двумя приступными предметами A и B, но между которыми нельзя провести прямой линіи (черт. 31).

Взявъ точку C, изъ которой были бы видимы предметы A и B, измѣряю $\angle ACB$, а также стороны AC и CB. Для отысканія AB рѣшаю треугольникъ ACB.

Рѣшеніе 1. $a + b : a - b = \operatorname{Cotg}\frac{1}{2}C : \operatorname{Tang}\frac{1}{2}(A - B)$, найдя A и B, опредѣляю c по пропорціи $c . a = \operatorname{Sin} C : \operatorname{Sin} A$.

Рѣшеніе 2. Помощію *вспомогательнаго угла.*

Положивъ уголъ φ такъ, чтобы онъ соотвѣтствовалъ формулѣ

$$\operatorname{Tang}\varphi = \frac{2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C.\sqrt{ab}}{a-b} \text{ (§ 12), получ. } c = \sqrt{(a-b)^2 \operatorname{Sec}^2\varphi} = \frac{a-b}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

Численный примѣръ. $AC = b = 2653$ ф., $CB = a = 3469$ ф. и $C = 68°43'28''$.

Рѣшеніе. $AB = c = 3520{,}4$ ф.

Задача 5. Найти разстояніе между двумя неприступными предметами.

Рѣшеніе. Взявъ такія двѣ точки C и D, изъ которыхъ видимы были бы концы данной прямой AB (черт. 32), замѣчаю углы DCA и CDA, DCB и CDB, а также $\angle ACB = ACD - BCD$ и измѣряю прямую CD.

Тогда получимъ два треугольника CAD и CBD; въ первомъ изъ нихъ опредѣливъ AC, а во второмъ CB, и зная при томъ $\angle ACB$, найду величину прямой AB. Вычисленіе искомыхъ частей производится по извѣстнымъ уже тригонометрическимъ формуламъ.

Задача 6. Даны три точки A, B, C, между которыми извѣстны относительныя разстоянія $AC = b$, $CB = a$, и $AB = c$; требуется найти разстояніе четвертой точки M отъ каждой изъ трехъ данныхъ (черт. 33); если притомъ извѣстно, что всѣ точки лежатъ на той же поверхности и наблюдатель находится въ точкѣ M (*)

Рѣшеніе Измѣряю углы AMC и CMB; если сумма ихъ равна углу AMB, то всѣ четыре точки лежатъ въ той же плоскости.

Опредѣленіе всѣхъ частей треугольниковъ MAC и MBC зависитъ отъ угловъ $MAC = x$ и $MBC = y$, величину которыхъ и постараемся опредѣлить.

Положивъ $\angle BMC = \alpha$ и $\angle CMA = \beta$, и вычисливъ, помощію данныхъ сторонъ, $\angle ACB = C$, получимъ, что въ четыреугольникѣ $ACBM$ сумма угловъ

$\alpha + \beta + C + x + y = 360°$, откуда $x + y = 360° - (\alpha + \beta + C)$.

Разность угловъ $x - y$ можетъ быть вычислена помощію треугольниковъ AMC и BMC, изъ которыхъ получаемъ пропорціи:

$$\text{Sin}\beta \,.\, \text{Sin}x = b \,.\, MC \;\ldots (1), \quad \text{Sin}\alpha : \text{Sin}y = a : MC \;\ldots (2),$$

откуда $$\frac{b\,\text{Sin}x}{\text{Sin}\beta} = \frac{a\,\text{Sin}y}{\text{Sin}\alpha} \text{ или } \frac{\text{Sin}x}{\text{Sin}y} = \frac{a\,\text{Sin}\beta}{b\,\text{Sin}\alpha}$$

(*) Задачу эту обыкновенно называютъ *Потенотовою* (который занимался ея изслѣдованіемъ въ 1692 г.,. Справедливѣе было бы назвать ее задачею *Шнеллiуса* (Snellius), который рѣшилъ ее прежде другихъ (въ 1614 г.). Подробное изложеніе этого вопроса предложено *Гаусомъ.* Французскій математикъ *Буркартъ* помощію этого вопроса опредѣлилъ положеніе зданія Collège de France въ Парижѣ: отъ этого зданія онъ могъ обозрѣть три точки, положеніе которыхъ было опредѣлено: dôme des Invalides, Pyramide de Mont Martre и Tourillon de Notre Dame.

Положивъ $\frac{a\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Sin}\alpha} = a'$, получимъ

$$\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Sin}y} = \frac{a'}{b} \text{ или } \frac{\mathrm{Sin}x + \mathrm{Sin}y}{\mathrm{Sin}x - \mathrm{Sin}y} = \frac{a'+b}{a'-b},$$

откуда наконецъ

$$\frac{\mathrm{Tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\mathrm{Tang}\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{a'+b}{a'-b}.$$

Опредѣливъ $x+y$ и остальныя двѣ величины $a'+b$ и $a'-b$, найдемъ $x-y$, а слѣдовательно будетъ извѣстенъ и каждый изъ угловъ x и y.

Зная эти углы, по формуламъ (1) или (2) найдемъ MC, а потомъ по треугольникамъ AMC и BMC нетрудно отыскать AM и BM.

Численное приложеніе. При съемкѣ морскихъ береговъ Финскаго залива опредѣлено измѣреніемъ положенія слѣдующихъ точекъ (черт. 35):

1) Вышгородской церкви въ Ревелѣ (обознач. букв. C).

2) Сигнала на островѣ Карлосѣ, B.

3) Замка Лоде на полуостровѣ Вимсѣ, A.

Притомъ нашли $BC = 2818,6$ саж

$$\angle ACB = 60°42'46'' \text{ и } AC = 4950,6 \text{ саж.}$$

Чтобы опредѣлить положеніе острова Панди, означеннаго буквою M, измѣрили углы

$$BMC = 24°57'15'';$$
$$AMC = 51°49'21''.$$

Какъ велики разстоянія отъ этого острова до трехъ прежде назначенныхъ точекъ?

ТАБЛИЦА

УПОТРЕБИТЕЛЬНѢЙШИХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФОРМУЛЪ.

Формулы гоніометрическія:

1) $\mathrm{Sin}^2 a + \mathrm{Cos}^2 a = 1.$ 2) $1 + \mathrm{Tang}^2 a = \mathrm{Sec}^2 a.$

3) $\mathrm{Tang}\, a = \dfrac{\mathrm{Sin}\, a}{\mathrm{Cos}\, a}.$ 4) $\mathrm{Cotg}\, a = \dfrac{\mathrm{Cos}\, a}{\mathrm{Sin}\, a}.$

5) $\mathrm{Tang}\, a \,.\, \mathrm{Cotg}\, a = 1.$

6) $\mathrm{Sec}\, a = \dfrac{1}{\mathrm{Cos}\, a} = \pm \sqrt{1 + \mathrm{Tang}^2 a}$

7) $\mathrm{Cosec}\, a = \dfrac{1}{\mathrm{Sin}\, a} = \pm \sqrt{1 + \mathrm{Cotg}^2 a}$

8) $\mathrm{Sin}(a \pm b) = \mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, b \pm \mathrm{Sin}\, b \,.\, \mathrm{Cos}\, a.$

9) $\mathrm{Cos}(a \pm b) = \mathrm{Cos}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, b \mp \mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Sin}\, b.$

10) $\mathrm{Sin}\, 2a = 2\, \mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, a.$ 11) $\mathrm{Cos}\, 2a = 2\mathrm{Cos}^2 a - 1 = 1 - 2\mathrm{Sin}^2 a.$

12) $\mathrm{Sin}\, a = 2\, \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a \,.\, \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a.$ 13) $\mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a$

14) $2\, \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a = 1 + \mathrm{Cos}\, a.$ 15) $2\, \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \mathrm{Cos}\, a$

16) $\mathrm{Tang}(a \pm b) = \dfrac{\mathrm{Tg}\, a \pm \mathrm{Tg}\, b}{1 \mp \mathrm{Tg}\, a . \mathrm{Tg}\, b}.$ 17) $\mathrm{Tg}\, 2a = \dfrac{2\, \mathrm{Tg}\, a}{1 - \mathrm{Tg}^2 a}.$

18) $\mathrm{Cotg}(a \pm b) = \dfrac{\mathrm{Cotg}\, a . \mathrm{Cotg}\, b \mp 1}{\mathrm{Cotg}\, a \pm \mathrm{Cotg}\, b}$ 19) $\mathrm{Cotg}\, 2a = \dfrac{\mathrm{Cotg}^2 a - 1}{2\, \mathrm{Cotg}\, a}.$

20) $\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{Cos}\, a}{1 + \mathrm{Cos}\, a}} = \dfrac{1 - \mathrm{Cos}\, a}{\mathrm{Sin}\, a} = \dfrac{\mathrm{Sin}\, a}{1 + \mathrm{Cos}\, a}.$

21) $\mathrm{Sin}\, p \pm \mathrm{Sin}\, q = 2\, \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p \pm q) \,.\, \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p \mp q).$

22) $\mathrm{Cos}\, p + \mathrm{Cos}\, q = 2\, \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p + q) \,.\, \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(p - q).$

23) $\mathrm{Cos}\, q - \mathrm{Cos}\, p = 2\, \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p + q) \,.\, \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(p - q).$

24) $\mathrm{Sin}^2 p - \mathrm{Sin}^2 q = \mathrm{Sin}(p + q) \,.\, \mathrm{Sin}(p - q).$

25) $\mathrm{Cos}^2 p - \mathrm{Sin}^2 q = \mathrm{Cos}(p + q) \,.\, \mathrm{Cos}(p - q).$

26) $\mathrm{Tang}\, p \pm \mathrm{Tang}\, q = \dfrac{\mathrm{Sin}(p \pm q)}{\mathrm{Cos}\, p \,.\, \mathrm{Cos}\, q}.$ 27) $\mathrm{Cotg}\, p \pm \mathrm{Cotg}\, q = \dfrac{\mathrm{Sin}(q \pm p)}{\mathrm{Sin}\, p \,.\, \mathrm{Sin}\, q}.$

28) $\mathrm{Sin}\, p + \mathrm{Sin}\, q : \mathrm{Sin}\, p - \mathrm{Sin}\, q = \mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}(p + q) : \mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}(p - q).$

Формулы тригонометрическія:

1. Для рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ ($A = 90°$)

1) $b = a \,.\, \mathrm{Sin}B$, 2) $b = a \,.\, \mathrm{Cos}C$,

3) $c = b \,.\, \mathrm{Tang}C$, 4) $a^2 = b^2 + c^2$.

2. Для рѣшенія косвенноугольныхъ треугольниковъ.

1) $a : b : c = \mathrm{Sin}A : \mathrm{Sin}B : \mathrm{Sin}C$, или $\dfrac{a}{\mathrm{Sin}A} = \dfrac{b}{\mathrm{Sin}B} = \dfrac{c}{\mathrm{Sin}C}$,

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}A$,

$$a = \frac{b-c}{\mathrm{Cos}\varphi},\ \mathrm{Tang}\varphi = \frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{bc};$$

3) $\mathrm{Cos}A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\mathrm{Sin}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$,

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\ \mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

4) $a = b \,.\, \mathrm{Cos}C + c \,.\, \mathrm{Cos}B$;

5) $a + b : a - b = \mathrm{Cotg}\frac{1}{2}C : \mathrm{Tang}\frac{1}{2}(A - B)$;

6) $\mathrm{Sin}A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

3. Площади треугольниковъ.

1) $F = \frac{1}{2}ab \,.\, \mathrm{Sin}C$.

2) $F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I.

Аналитическое изслѣдованіе сомнительныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ.

При рѣшеніи треугольниковъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по углу противолежащему одной изъ нихъ обыкновенно опредѣляютъ сперва углы B и C, и потомъ уже находятъ сторону c помощію этихъ угловъ (§ 13, зад. 2). Но сторона эта можетъ быть непосредственно опредѣлена по даннымъ a, b, A изъ формулы $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \mathrm{Cos}A$.

Рѣшая это уравненіе относительно c, получимъ

$$c = b\,\mathrm{Cos}A \pm \sqrt{a^2 + b^2(\mathrm{Cos}^2A - 1)}, \text{ откуда}$$

$$c = b\,\mathrm{Cos}A \pm \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha),$$

$$= b\,\mathrm{Cos}A \pm \sqrt{(a - b\,\mathrm{Sin}A)(a + b\,\mathrm{Sin}A)} \quad \ldots\ldots (\beta).$$

Формула эта весьма удобна для изслѣдованія *сомнительныхъ случаевъ* при рѣшеніи треугольниковъ.

Такъ какъ величина c должна быть вещественною и положительною, то необходимо, чтобы a^2 было = или $> b^2\,\mathrm{Sin}^2A$ (α), т. е. $1 \geqq \frac{b\,\mathrm{Sin}A}{a}$ (*).

Предполагая $\frac{b\,\mathrm{Sin}A}{a} < 1$, или что тоже, $a > b\,\mathrm{Sin}a$, получимъ, что обѣ величины c_1 и c_2 будутъ вещественныя и неравныя.

При $a < b\,\mathrm{Sin}A$ рѣшеніе невозможно, мнимое выраженіе радикала показываетъ, что треугольникъ не существуетъ.

Остается только разобрать, въ какихъ случаяхъ обѣ эти величины будутъ положительныя.

Если $A > 90^\circ$, то косинусъ A отрицательный, и въ этомъ случаѣ радикалъ долженъ быть взятъ только со знакомъ $+$.

Неравенство $b\,\mathrm{Cos}A + \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A} > 0$ даетъ

$$\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A} > -b\,\mathrm{Cos}A, \text{ или } a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A > b^2\,\mathrm{Cos}^2A$$

$$a^2 > b^2,\ a > b.$$

Если $A = 90^\circ$, то

$$\mathrm{Cos}A = 0,\ \mathrm{Sin}\,A = 1, \text{ и } c^2 = \sqrt{a^2 - b^2}; \text{ откуда } a > b.$$

Если $A < 90^\circ$, то $\mathrm{Cos}A > 0$, и величина $b\,\mathrm{Cos}A + \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A}$, (гдѣ радикалъ съ плюсомъ), будетъ соотвѣтствовать вопросу.

Чтобы соотвѣтствовала и вторая величина $b\,\mathrm{Cos}A - \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A}$, (гдѣ радикалъ съ минусомъ) необходимо, чтобы было

$$\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A} < b\,\mathrm{Cos}A \text{ откуда } a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}^2A < b^2\,\mathrm{Cos}^2A,$$

а потому $a^2 < b^2(\mathrm{Sin}^2A + \mathrm{Cos}^2A)$, или $a < b$. Соединивъ всѣ выведенные нами результаты, получимъ

(*) При $1 = \frac{b\,\mathrm{Sin}A}{a}$, т. е. при $a = b\mathrm{Sin}A$, коренная величина уничтожится и получимъ $c = b\,\mathrm{Cos}A$, слѣдовательно треугольникъ будетъ прямоугольный при B.

c имѣетъ одно значеніе для $a \geqq b$.

c — два значенія для $a < b$, если въ то же время $a > b \,\mathrm{Sin} A$.

c — одно значеніе для $a = b \,\mathrm{Sin} A$.

c невозможно для $a < b \,\mathrm{Sin} A$.

Слѣдовательно аналитическія изслѣдованія вполнѣ подтверждаютъ изслѣдованія графическія.

Примѣчаніе. При этомъ необходимо замѣтить, что при $A < 90°$ вмѣстѣ съ $a < b$, безъ вычисленія величины $\frac{b \,\mathrm{Sin} A}{a}$, невозможно сразу узнать, будетъ ли треугольникъ возможный, невозможный или двойственный. Всѣ эти случаи зависятъ отъ того, будетъ ли выраженіе $\frac{b \,\mathrm{Sin} A}{a} = 1, > 1$, или < 1.

II.

Разложеніе функцій $\mathrm{Sin}\, x$, $\mathrm{Cos}\, x$ въ ряды по возрастающимъ степенямъ дуги x.

Величина дуги можетъ быть выражена числомъ, при чемъ за единицу могутъ быть приняты радіусъ или діаметръ. Притомъ доказано, что величины тригонометрическихъ линій находятся въ зависимости отъ величины дуги, по этому первыя изъ нихъ могутъ быть выражены помощію послѣднихъ и обратно.

Предположимъ, что синусъ и косинусъ ($\mathrm{Sin}x$, $\mathrm{Cos}x$), расположены въ ряды по возрастающимъ степенямъ дуги x, и при каждомъ членѣ имѣютъ численнаго коеффиціента, независимаго отъ x. Остается только опредѣлить каждаго изъ этихъ коеффиціентовъ

Пусть
$$\mathrm{Sin}x = c + c' x + c'' x^2 + c''' x^3 + (*) \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$
$$\mathrm{Cos}x = k + k' x + k'' x^2 + k''' x^3 + \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

Изъ этого видно, что $c = 0$ и $k = 1$, потому что при дугѣ $x = 0$, необходимо и $\mathrm{Sin}x = 0$, а $\mathrm{Cos}x = 1$.

Коеффиціенты c'', c'''', c'''''' и проч. а также k', k''', k''''' и проч. должны быть равны 0, потому что для $+x$ и $-x$, будучи равными величинами, синусы имѣютъ разные знаки, а косинусы имѣютъ знаки одинакіе

Наконецъ, въ первой строкѣ, коеффиціентъ c' долженъ быть $= 1$, потому что, раздѣливъ строку (A) на x, съ обѣихъ сторонъ получимъ

$$\frac{\mathrm{Sin}x}{x} = c' + c''' x^2 + c''''' x^4 + \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Но предѣлъ дроби $\frac{\mathrm{Sin}x}{x}$ есть 1, предѣлъ строки — c', и эти предѣлы должны быть равны Этими разсужденіями вышеуказанныя строки приводятся къ слѣдующимъ.

$$\mathrm{Sin}x = x + a\, x^3 + b\, x^5 + c\, x^7 + d\, x^9 + \; . \; . \; . \; . \quad (C)$$
$$\mathrm{Cos}x = 1 + \alpha\, x^2 + \beta\, x^4 + \gamma\, x^6 + \delta\, x^8 + \; . \; . \; . \; . \quad (D)$$

(*) Понятно, что въ ряду (A) *ни дробныхъ, ни отрицательныхъ показателей быть не можетъ:*

1) Допустивъ одинъ изъ членовъ этого ряда равнымъ Cx^{-p}, или, что тоже самое, $\frac{C}{x^p}$, получимъ, что, при $x = 0$, $\mathrm{Sin}x = 0 + \infty$, или $0 = \infty$, чего быть не можетъ.

2) Положивъ, что въ этомъ ряду есть членъ $Cx^{\frac{p}{q}}$, или $C\sqrt[q]{x^p}$, получимъ q корней, слѣдовательно вторая часть уравненія (A) будетъ имѣть q различныхъ величинъ, между тѣмъ какъ первая часть уравненія, состоя изъ синуса дуги, будетъ имѣть только одну опредѣленную величину.

Слѣдовательно рядъ (A) ни дробныхъ, ни отрицательныхъ показателей не допускаетъ Тоже самое, и тѣми же пріемами можно доказать и для ряда $\mathrm{Cos}x$, т. е. для ряда (B).

въ которыхъ должно найти численныя величины коеффиціентовъ. Для этого могутъ служить уравненія: $\mathrm{Sin}^2x + \mathrm{Cos}^2x = 1$ и $2\,\mathrm{Cos}^2x = 1 + \mathrm{Cos}2x$ Но

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}^2x = x^2 &+ 2ax^4 + a^2x^6 \\ &+ 2bx^6 + 2abx^8 + b^2x^{10} \\ &+ 2cx^8 + 2acx^{10} + \text{и проч.} \\ &+ 2dx^{10} + \ldots \qquad (E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}^2x = 1 &+ 2\alpha x^2 + \alpha^2x^4 \\ &+ 2\beta x^4 + 2\alpha\beta x^6 + \beta^2x^8 \\ &+ 2\gamma x^6 + 2\alpha\gamma x^8 + 2\beta\gamma x^{10} + \ldots \\ &+ 2\delta x^8 + 2\alpha\delta x^{10} + \ldots \\ &+ 2\varepsilon x^{10} + \ldots \qquad (F)\end{aligned}$$

Сумма этихъ уравненій $= 1$ (ибо $\mathrm{Sin}^2x + \mathrm{Cos}^2x = 1$), а потому сумма коеффиціентовъ каждой степени x должна быть $= 0$

Отсюда получаемъ. 1. $2\alpha + 1 = 0$
2. $2a + \alpha^2 + 2\beta = 0$
3. $a^2 + 2b + 2\alpha\beta + 2\gamma = 0$
4. $2ab + 2c + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\delta = 0$ и проч

Помощію формулы $2\,\mathrm{Cos}^2x = 1 + \mathrm{Cos}2x$ можемъ получить рядъ новыхъ уравненій, а именно помноживъ уравненіе (F) на 2, а въ (D) вставя $2x$ вмѣсто x и придавъ 1, получимъ двѣ строки, въ которыхъ коеффиціенты при x^2, x^4 и проч. должны быть равны между собою. Отсюда получимъ новыя уравненія

I $2\alpha^2 + 4\beta = 16\beta$
II $4\alpha\beta + 4\gamma = 64\gamma$
III $2\beta^2 + 4\alpha\gamma + 4\delta = 256\delta$ и проч.

Изъ уравненія 1 получимъ $\alpha = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1.2}$,

вставивъ въ I найдемъ $\beta = +\frac{1}{24} = +\frac{1}{1.2.3.4}$.

потомъ изъ II, $\gamma = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ и т. д.

По этимъ величинамъ изъ уравненій 2, 3, 4 и проч. найдутся a, b, c и проч.

$$a = -\frac{1}{1.2.3},\quad b = +\frac{1}{1.2.3.4.5};\quad c = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} \text{ и т. д.}$$

Вставя эти величины въ строки (C), (D), получимъ

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \qquad (G)$$

$$\mathrm{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + (^*) \ldots \qquad (H)$$

Раздѣливъ эти строки одну на другую, получаемъ:

$$\mathrm{Tang}x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.3} + \ldots$$

$$\mathrm{Cotg}x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5.7.9} - \ldots$$

Помощію этихъ формулъ вычисленіе тригонометрическихъ величинъ можетъ быть произведено гораздо легче, чѣмъ по способамъ нами прежде предложеннымъ, потому что уменьшеніе членовъ идетъ здѣсь весьма быстро, и мы можемъ употреблять только тѣ члены, которые имѣютъ вліяніе на послѣднюю требуемую десятичную цифру

Нетрудно убѣдиться, что оба эти ряда (G и H) суть *сходящіеся*

Уже доказано, что дуга, равная радіусу, по приблизительному вычисленію составляетъ 57°17′44″ (§ 8. 1) или точнѣе 57°17′44″, 8 = 57°, 29578 ; тригонометрическія же вели-

(*) Другой выводъ этихъ рядовъ, основанный на началахъ высшаго анализа, изложенъ въ сочиненіи: «Начальныя основанія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій», сост. г. профессоромъ А. Савичемъ, § 30, стр. 34 –38. Разложеніе тригонометрическихъ величинъ въ ряды, основанное на формулахъ *Моавра* и *Котеса*, можно найти также въ сочиненіяхъ Ейлера, Лежандра, Фурсы и другихъ

чины синусовъ и косинусовъ отыскиваются только для дугъ до 45°, слѣдовательно, при радіусѣ равномъ единицѣ, дуга $x < 1$, а потому въ рядахъ (G и H), въ каждомъ изъ послѣдующихъ членовъ, числители, съ возрастаніемъ показателя, уменьшаются, а въ тоже время знаменатели увеличиваются, слѣдовательно уменьшаются послѣдовательно и члены строкъ, и всегда можно взять столько членовъ, что послѣдній будетъ такъ малъ, какъ угодно.

Изъ этого же ряда видно, что разность между дугою и ея синусомъ *менѣе шестой части куба дуги.*

III.

Краткое понятіе о съемкѣ плановъ.

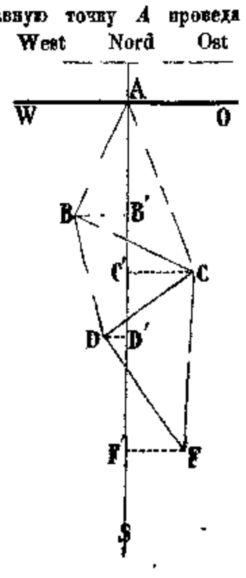
Задача. *Снять планъ данной мѣстности.*

1. Предварительныя понятія о тріангуляціи. Чтобы опредѣлить положеніе главнѣйшихъ точекъ данной мѣстности должно представить ихъ соединенными между собою прямыми линіями: черезъ это вся мѣстность покроется непрерывною сѣтью треугольниковъ, которыхъ вершины будутъ лежать въ главнѣйшихъ точкахъ мѣстности. Такой способъ разбивки мѣстности на треугольники называется *тріангуляціею.*

2. Базисъ съемки. Принявъ одну изъ сторонъ треугольника за *основаніе* съемки (base, basis), тщательно вымѣряютъ его, и потомъ измѣряютъ углы, идущіе отъ концевъ этой прямой къ главнымъ точкамъ мѣстности. Если треугольники лежатъ не въ одинъ рядъ, а группою, то за основаніе съемки обыкновенно стараются избрать на ровномъ мѣстѣ такую линію, которая проходила бы по срединѣ даннаго участка, и изъ концовъ которой было бы видимо наибольшее число главныхъ точекъ съемки.

3. Оріентировка плана. Для отнесенія плана къ странамъ свѣта N, S, O, W, должно черезъ одну изъ главныхъ точекъ A, называемую *основною*, провести *меридіанъ* мѣстности (см. космографію), и къ нему перпендикуляръ (OW), относительно которыхъ и опредѣляютъ положеніе остальныхъ главныхъ точекъ. Уголъ, опредѣляющій положеніе или направленіе сторонъ треугольниковъ въ отношеніи къ меридіану даннаго мѣста, называется *азимутомъ*. Величины вымѣренныхъ сторонъ и угловъ полученныхъ треугольниковъ, а также азимуты главныхъ линій, съ точностію вносятся въ брульонъ, по которому и составляется планъ мѣстности.

4. Вычисленія произведенной съемки. Черезъ главную точку A проведя меридіанъ NS, и обозначивъ положеніе точекъ W и O, измѣряютъ со всевозможною точностію сторону AB, принимаемую за основаніе, а также азимутъ ея, т. е $\angle BAS$. Обозначивъ главныя точки A, B, C, D, F, и соединивъ ихъ между собою прямыми, получаютъ непрерывную сѣть треугольниковъ ABC, BCD, DCF, въ которыхъ и вычисляютъ всѣ стороны по достаточному числу данныхъ, предварительно измѣренныхъ. Пусть $AB = 1000$ саж., $\angle BAS = 14°48'$, $A = 50°28'$, $B = 89°20'$; то получимъ $C = 40°12'$, AC азим O 35°40'. BC азим. O 75°52'.



Такимъ же образомъ по измѣреннымъ частямъ вычисляютъ части слѣдующихъ треугольниковъ, а помощію вычисленныхъ угловъ, взявъ ихъ суммы или разности, опредѣляютъ азимуты другихъ сторонъ.

Такъ напримѣръ азимутъ стороны AC, идущей по направленію къ O, равенъ $BAC - BAS = 35°40'$; азимутъ DC къ O равенъ 2 прям. — (азимутъ $AB + \angle ABC$)

$$= 180° - (14°48' + 89°20') = 75°52' \text{ къ } O.$$

Для нанесенія главныхъ точекъ на планъ должно предварительно вычислить разстояніе отъ меридіана и перпендикуляра, проходящихъ черезъ основную точку. Эти разстоянія называются *координатами*; тѣ изъ нихъ, которыя параллельны меридіану, называются *абсциссами*, а другія, перпендикулярныя къ нему, называются *ординатами*. При этомъ необходимо замѣтить, что произведеніе стороны треугольника на косинусъ азимута даетъ сумму или разность абсциссъ, а произведеніе стороны на синусъ азимута даетъ сумму или разность ординатъ. Такъ напримѣръ $AC.\mathrm{Cos}\,35°40' = AC' = AB' + B'C' =$ суммѣ ординатъ; абсцисса послѣдней точки даетъ полную меридіанальную дугу мѣстности.

Если основная точка A будетъ избрана внутри снимаемаго участка, то абсциссы однѣхъ точекъ пойдутъ къ N, а другихъ къ S, и тогда меридіанальная дуга всей мѣстности выразится суммою абсциссъ тѣхъ точекъ, которымъ принадлежатъ наибольшія абсциссы, лежащія къ N-ду и S-ду

По чертежу, нами предложенному,

5. Брульонъ составляется слѣдующимъ образомъ:

ΔABC	ΔBCD	ΔCDF	Азимутъ	Длина стороны
$A - 50°28'$	$B = 68°41'$	$C = 32°41'$	$AB - W\ 14°48'$	1000
$B = 89°20'$	$C = 73°12'$	$D = 125°27'$	$AC - O\ 35°40'$	1549,2
$C = 40°12'$	$D = 38°\ 7'$	$F - 21°52'$	$BC\ \ O\ 75°52'$	1194,9
Ординаты	Абсциссы отъ		$BD - O\ 7°11'$	1853,2
$B\ \ W\ 255,4$	$B\ 966,8$		$CD - W\ 30°56'$	1803,4
$C - O\ 903,3$	$C\ 1258,6$		$DF - O\ 23°37'$	2614,0
$D - W\ 23,7$	$D\ 2805,4$		$CF - O\ 1°45'$	3944,3
$F - O\ 1023,7$	$F\ 5201,0$		(*)	

Изъ вычисленій этихъ видно, что чертежъ нанесенъ не вполнѣ точно, прямая CF должна отклониться не къ W, а къ O на $1°45'$, и ордината $FF' > CC'$.

6. Прокладка сѣти состоитъ въ построеніи по масштабу многоугольника подобнаго данному на землѣ; нанесеніе же вершинъ многоугольника производится по *способу координатъ*, которыя и берутся изъ брульона.

Краткое понятіе о нивеллированіи.

1 Предварительныя понятія. Если черезъ O обозначимъ центръ земнаго шара (см. полит.), черезъ LM часть поверхности океана, а черезъ P верхнюю точку измѣряемаго предмета, то часть PQ продолженнаго земнаго радіуса OP, или, что тоже, часть вертикали, идущей отъ вершины измѣраемаго предмета до поверхности уровня океана, называется *абсолютною высотою* предмета. Разность абсолютныхъ высотъ $PQ - TM$ двухъ мѣстъ P и T, показывающая на сколько одно изъ нихъ лежитъ выше другаго, называется *относительною ихъ высотою*. Двѣ, точки, имѣющія одинаковыя абсолютныя высоты, называются *точками того же уровня*. Дуга LM называется *истиннымъ уровнемъ моря*; TV — *истиннымъ уровнемъ мѣста* T; горизонтальный лучъ зрѣнія TW называется *видимымъ уровнемъ мѣста* T.

2 Предметъ нивеллированія состоитъ въ опредѣленіи абсолютныхъ или относительныхъ высотъ различныхъ точекъ земной поверхности. Нивеллировка бываетъ: 1) *Барометрическая*, помощію высоты ртутнаго столба въ барометрѣ,— употребляется только при измѣреніи большихъ возвышенностей, 2) *Топографическая*, — помощію особаго реда инструментовъ, называемыхъ *нивеллирами*; 3) *Тригонометрическая*,— помощію тригонометрическихъ вычисленій.

(*) Брульонъ этотъ, независимо отъ съемки плановъ, заключаетъ въ себѣ множество примѣровъ для упражненія учащихся въ тригонометрическомъ вычисленіи.

Вопросъ 1. *Опредѣлить абсолютную высоту PQ мѣста P, изъ котораго можно видѣть море.* Проведя прямую PL по направленію къ *видимому горизонту* моря (*), получимъ, что $PL \perp OL$. Измѣривъ уголъ ZPL, въ прямоугольномъ треугольникѣ PLO, найдемъ $\angle POL = a$, притомъ, зная радіусъ земнаго шара $OL = r$, получимъ

$$OP = \frac{r}{\operatorname{Sin} OPL} = \frac{r}{\operatorname{Cos} POL} = r.\operatorname{Sec} POL$$

$= r.\operatorname{Sec} a$, а потому абсолютная высота

$$PQ = OP - r = r(\operatorname{Sec} a - 1), \ (^{**})$$

$$PQ = r \operatorname{Tang} a . \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} a$$

Если бы изъ мѣста P нельзя было видѣть море, то, смотря по надобности, избираютъ одинъ или нѣсколько промежуточныхъ пунктовъ, и опредѣляютъ относительныя ихъ высоты, а также и абсолютную высоту того изъ нихъ, изъ котораго видно море. Изъ сравненія этихъ высотъ между собою не трудно найти абсолютную высоту мѣста.

Вопросъ 2. *Найти относительную высоту двухъ мѣстъ P и T.*

Изъ точки O, какъ центра, радіусомъ OT, описавъ дугу TV, получимъ, что $PV =$ искомой относительной высотѣ. Но по причинѣ незначительнаго разстоянія предметовъ T и V, въ сравненіи съ радіусомъ земнаго шара, касательная TW почти сольется съ дугою TV, и слѣдовательно прямую TW можно принять за перпендикуляръ къ TO. Изъ точки T, по извѣстнымъ правиламъ опредѣляемъ высоту PW отъ вершины P до линіи горизонтальнаго луча; вся же относительная высота $PV = PW + WV$, слѣдовательно для рѣшенія предложенной задачи необходимо отыскать еще поправку $WV = h$.

Положивъ $TW = TV = d$, получимъ

$$(r + h)^2 = r^2 + d^2, \text{ или}$$

$$r + h = \sqrt{r^2 + d^2} = r\sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{r^2}\right)}$$

$$= r\left(1 + \frac{1 . d^2}{2r^2} - \frac{1 . d^4}{8r^4} + \ldots\right),$$

слѣдовательно $h = \frac{d^2}{2r} - \frac{d^4}{8r^3}$, или приблизительно $h = \frac{d^2}{2r}$ (***) . . . . (1.

Откинутый нами членъ $\frac{d^4}{8r^3}$ имѣетъ едва замѣтное вліяніе на результатъ, и то при разстояніи свыше 10 миль потому, что величина d весьма незначительна въ сравненіи съ радіусомъ земнаго шара.

(*) Т. е. къ окружности того круга, на предѣлахъ котораго небо, какъ кажется, сливается съ землею (Косм. г. Савича § 1; Мат. геогр. Талызина).

(**) $\operatorname{Sec} a - 1 = \frac{1}{\operatorname{Cos} a} - 1 = \frac{1 - \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} a} = \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} a}$

$= \frac{2 \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \operatorname{Tg} \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} a} . \operatorname{Tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{Tang} a . \operatorname{Tang} \frac{1}{2} a.$

(***) Эта же формула можетъ весьма легко быть выведена изъ геометрической пропорціи $h : d = d : 2r + h$, откуда $h = \frac{d^2}{2r + h}$, причемъ величина h въ знаменателѣ можетъ быть откинута, какъ ничтожная въ сравненіи съ діаметромъ земнаго шара.

Величина h (въ 1 форм.) называется *поправкою для приведенія видимаго уровня къ истинному.*

Примѣчаніе 1 Если разность высотъ двухъ точекъ можетъ быть опредѣлена изъ одной точки стоянія, то нивеллировка называется *простою*; въ противномъ же случаѣ — *сложною.*

Примѣчаніе 2. Мы дали здѣсь только краткое понятіе о тригонометрической нивеллировкѣ, дальнѣйшія же подробности по этому предмету относимъ къ геодезіи.

Приближеніе. При болѣе точныхъ вычисленіяхъ употребляется слѣдующій пріемъ: проведя хорду VT получимъ ΔPVT, въ которомъ $PV = H$. Измѣривъ $\angle Z'TP = \alpha$, найдемъ, что $\angle PTV = Z'TW - Z'TP + WTV = 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}c$,

$$PTV = 90^\circ - (\alpha - \tfrac{1}{2}c), \text{ потому что}$$

$$\angle WTV = \tfrac{1}{2} \smile VT = \tfrac{1}{2} VOT = \tfrac{1}{2}c, \text{ и } \angle TPO = \alpha - c.$$

Но изъ ΔVPT имѣемъ $\operatorname{Sin} P : \operatorname{Sin} PTV = VT : VP$ . . . . (A).

или
$$\operatorname{Sin}(\alpha - c) : \operatorname{Cos}(\alpha - \tfrac{1}{2}c) = VT : H,$$

откуда
$$H = VT \frac{\operatorname{Cos}(\alpha - \frac{1}{2}c)}{\operatorname{Sin}(\alpha - c)}.$$

Численный примѣръ. При измѣреніи горы A, Маточкина Шара, (въ Сѣв. ледовит. океан., на остр. Нов. земля), найдено было $VT = 10400$ саж., $\angle PTW = 2^\circ 24'$, $c = 0^\circ 11' 57''$. (Записки гидрогр. деп. 1844 г., Ч. II).

Слѣдовательно $\angle Z'TP = Z'TW - PTW = 90^\circ - 2^\circ 24' = 87^\circ 36'$,

$$TPO = Z'TP - c = 87^\circ 24' 3''$$

$$PTV = PTW + WTV = 2^\circ 24' + 5' 58'',5 = 2^\circ 29' 58'',5$$

Произведя вычисленіе по пропорціи (A), найдемъ:

$$VP = H = VT \frac{\operatorname{Sin} PTV}{\operatorname{Sin} P} = 454 \text{ саж.}$$

(При вычисленіи нашемъ высота мѣста наблюденія и рефракція въ соображеніе не приняты).

Въ книжныхъ магазинахъ И. И. Глазунова, Я. А. Исакова, М. О. Вольфа и другихъ извѣстныхъ книгопродавцевъ можно получить:

1. Начальныя основанія прямолинейной тригонометріи, по порученію начальства морскаго корпуса сост. А. Дмитріевъ. Съ двумя таблицами чертежей и съ четырьмя политипажами Спб. (Руководство это одобрено учебнымъ комитетомъ министерства народнаго просвѣщенія и учебнымъ комитетомъ Святѣйшаго Сѵнода). Цѣна 75 к., вѣсовыхъ за 2 ф. (Книгопродавцы пользуются 20% уступки).

2. Начальныя основанія сферической геометріи и сферической тригонометріи, по порученію начальства морскаго корпуса состав. А. Дмитріевъ. Съ двумя таблицами чертежей и съ двумя политипажами. Цѣна 70 к., вѣсовыхъ за 1 ф. (Книгопродавцы пользуются 20% уступки).

3. Собраніе геометрическихъ задачъ, или геометрія древнихъ въ 850-ти задачахъ, сост. Д-ромъ Вёкелемъ. Съ таблицею чертежей. Съ 5-го нѣмецкаго изданія переведено А. Н., и издано подъ редакціею А. Дмитріева. Спб. 1867. (Одобрено учебнымъ комитетомъ мин. нар. просв.). Цѣна 50 к., вѣсовыхъ за 1 ф. (Книгопродавцы пользуются 20% уступки).

Эти же книги можно получать у швейцара 7-й Спб. гимназіи (Реальное училище), на В. О., на углу Большаго проспекта и 12-й линіи.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

ТАБЛИЦА I.

Натуральныя тригонометрическія величины первой четверти,

черезъ каждыя десять минутъ,

ВЕЛИЧИНА ДУГЪ ВЪ ДОЛЯХЪ РАДІУСА НА КАЖДЫЙ ГРАДУСЪ

ПРИБАВЛЕНІЕ I.

ТАБЛИЦЫ НАТУРАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ

и величина дугъ въ доляхъ радіуса.

Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.
0,000	0	0	0,000000	1,000000	0,000000	infinit	0	90	1,571
		10	0,002909	0,999996	0,002909	343,77371	50		
		20	0,005818	0,999983	0,005818	171,88540	40		
		30	0,008727	0,999962	0,008727	114,58865	30		
		40	0,011635	0,999932	0,011636	85,939791	20		
		50	0,014544	0,999894	0,014545	68,750087	10		
0,017	1	0	0,017452	0,999848	0,017455	57,289962	0	89	1,553
		10	0,020361	0,999793	0,020365	49,103881	50		
		20	0,023269	0,999729	0,023275	42,96407.	40		
		30	0,026177	0,999657	0,026186	38,188459	30		
		40	0,029085	0,999577	0,029097	34,367771	20		
		50	0,031992	0,999488	0,032009	31,241577	10		
0,035	2	0	0,034900	0,999391	0,034921	28,636253	0	88	1,536
		10	0,037807	0,999285	0,037834	26,431600	50		
		20	0,040713	0,999171	0,040747	24,541758	40		
		30	0,043620	0,999048	0,043661	22,903766	30		
		40	0,046525	0,998917	0,046576	21,470401	20		
		50	0,049431	0,998778	0,049491	20,205553	10		
0,052	3	0	0,052336	0,998630	0,052408	19,081137	0	87	1,518
		10	0,055241	0,998473	0,055325	18,0749..	50		
		20	0,058145	0,998308	0,058243	17,16933.	40		
		30	0,061049	0,998133	0,061163	16,349855	30		
		40	0,063952	0,997953	0,064083	15,604784	20		
		50	0,066854	0,997763	0,067004	14,924417	10		
0,070	4	0	0,069757	0,997564	0,069927	14,300666	0	86	1,501
		10	0,072658	0,997357	0,072851	13,726738	50		
		20	0,075559	0,997141	0,075776	13,196883	40		
		30	0,078460	0,996917	0,078702	12,706205	30		
		40	0,081359	0,996685	0,081630	12,250505	20		
		50	0,084258	0,996444	0,084558	11,826167	10		
0,087	5	0	0,087156	0,996195	0,087489	11,430052	0	85	1,484
		10	0,090053	0,995937	0,090421	11,059431	50		
		20	0,092950	0,995671	0,093354	10,711913	40		
		30	0,095846	0,995396	0,096290	10,385397	30		
		40	0,098741	0,995113	0,099226	10,078031	20		
		50	0,101635	0,994822	0,102164	9,788173	10		
0,105	6	0	0,104529	0,994522	0,105104	9,514365	0	84	1,466
		10	0,107421	0,994214	0,108046	9,255304	50		
		20	0,110313	0,993897	0,110990	9,009826	40		
		30	0,113203	0,993572	0,113936	8,776887	30		
		40	0,116093	0,993238	0,116883	8,555547	20		
		50	0,118982	0,992807	0,119833	8,344956	10		
0,122	7	0	0,121869	0,992546	0,122785	8,144346	0	83	1,449
		10	0,124756	0,992187	0,125738	7,953022	50		
		20	0,127642	0,991820	0,128694	7,770351	40		
		30	0,130526	0,991445	0,131653	7,595754	30		
		40	0,133410	0,991061	0,134613	7,428706	20		
		50	0,136292	0,990669	0,137576	7,268726	10		
Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.

ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ЧЕРЕЗЪ КАЖДЫЯ ДЕСЯТЬ МИНУТЪ

и величина дугъ въ доляхъ радиуса

Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang	Cotang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.
0,140	8	0	0,139173	0,990268	0,140541	7,115370	0	82	1,431
		10	0,142053	0,989860	0,143508	6,968234	50		
		20	0,144932	0,989442	0,146478	6,826944	40		
		30	0,147809	0,989016	0,149451	6,691156	30		
		40	0,150686	0,988582	0,152426	6,560554	20		
		50	0,153561	0,988139	0,155404	6,434843	10		
0,157	9	0	0,156435	0,987688	0,158384	6,313752	0	81	1,414
		10	0,159307	0,987230	0,161368	6,197028	50		
		20	0,162178	0,986762	0,164354	6,084438	40		
		30	0,165048	0,986286	0,167343	5,975764	30		
		40	0,167916	0,985801	0,170334	5,870804	20		
		50	0,170783	0,985309	0,173330	5,769369	10		
0,175	10	0	0,173648	0,984808	0,176327	5,671282	0	80	1,396
		10	0,176512	0,984299	0,179328	5,576379	50		
		20	0,179375	0,983781	0,182332	5,484505	40		
		30	0,182236	0,983255	0,185340	5,395517	30		
		40	0,185095	0,982721	0,188350	5,309280	20		
		50	0,187953	0,982178	0,191363	5,225665	10		
0,192	11	0	0,190809	0,981627	0,194380	5,144554	0	79	1,379
		10	0,193664	0,981068	0,197401	5,065835	50		
		20	0,196517	0,980501	0,200425	4,989403	40		
		30	0,199368	0,979925	0,203452	4,915157	30		
		40	0,202218	0,979341	0,206483	4,843005	20		
		50	0,205066	0,978748	0,209518	4,772857	10		
0,209	12	0	0,207912	0,978148	0,212557	4,764630	0	78	1,361
		10	0,210756	0,977539	0,215599	4,638246	50		
		20	0,213599	0,976922	0,218645	4,573629	40		
		30	0,216440	0,976296	0,221695	4,510709	30		
		40	0,219279	0,975662	0,224749	4,449418	20		
		50	0,222116	0,975020	0,227806	4,389694	10		
0,227	13	0	0,224951	0,974370	0,230868	4,331476	0	77	1,344
		10	0,227784	0,973712	0,233934	4,274707	50		
		20	0,230616	0,973045	0,237004	4,219332	40		
		30	0,233445	0,972370	0,240079	4,165300	30		
		40	0,236273	0,971687	0,243158	4,112561	20		
		50	0,239098	0,970995	0,246241	4,061070	10		
0,244	14	0	0,241922	0,970296	0,249328	4,010781	0	76	1,326
		10	0,244743	0,969588	0,252420	3,961652	50		
		20	0,247563	0,968872	0,255517	3,913642	40		
		30	0,250380	0,968148	0,258618	3,866713	30		
		40	0,253195	0,967415	0,261723	3,820828	20		
		50	0,256008	0,966675	0,264834	3,775952	10		
0,262	15	0	0,258819	0,965926	0,267949	3,732051	0	75	1,309
		10	0,261628	0,965169	0,271069	3,689093	50		
		20	0,264434	0,964404	0,274195	3,647047	40		
		30	0,267238	0,963631	0,277325	3,605884	30		
		40	0,270040	0,962849	0,280460	3,565575	20		
		50	0,272840	0,962059	0,283600	3,526094	10		
Дуг. въ дол. г.	G	M	Cosinus	Sinus.	Cotang	Tang	M	G.	Дуг. въ дол. г.

ТАБЛИЦЫ НАТУРАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ

и величина дугъ, въ доляхъ радіуса.

Дуг въ дол. г.	G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang	Cotang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.
0,279	16	0	0,275637	0,961262	0,286745	3,487414	0	74	1,292
		10	0,278432	0,960456	0,289896	3,449512	50		
		20	0,281225	0,959642	0,293052	3,412363	40		
		30	0,284015	0,958820	0,296914	3,375943	30		
		40	0,286803	0,957990	0,299380	3,340233	20		
		50	0,289589	0,957151	0,302553	3,305209	10		
0,297	17	0	0,292372	0,956305	0,305731	3,270853	0	73	1,274
		10	0,295152	0,955450	0,308914	3,237144	50		
		20	0,297930	0,954588	0,312104	3,204064	40		
		30	0,300706	0,953717	0,315299	3,171595	30		
		40	0,303479	0,952838	0,318500	3,139719	20		
		50	0,306249	0,951951	0,321707	3,108421	10		
0,314	18	0	0,309017	0,951057	0,324920	3,077684	0	72	1,257
		10	0,311782	0,950154	0,328139	3,047492	50		
		20	0,314545	0,940243	0,331364	3,017840	40		
		30	0,317305	0,948324	0,334595	2,938685	30		
		40	0,320062	0,947397	0,337833	2,960042	20		
		50	0,322816	0,946462	0,341077	2,931889	10		
0,332	19	0	0,325568	0,945519	0,344328	2,904211	0	71	1,239
		10	0,328317	0,944568	0,347585	2,876997	50		
		20	0,331063	0,943609	0,350848	2,850235	40		
		30	0,333807	0,942642	0,354119	2,823913	30		
		40	0,336548	0,941667	0,357396	2,798020	20		
		50	0,339285	0,940684	0,360680	2,772545	10		
0,349	20	0	0,342020	0,939693	0,363970	2,747477	0	70	1,222
		10	0,344752	0,938694	0,367268	2,722808	50		
		20	0,347481	0,937687	0,370573	2,698525	40		
		30	0,350207	0,936672	0,373885	2,674622	30		
		40	0,352931	0,935650	0,377204	2,651087	20		
		50	0,355651	0,934619	0,380530	2,627912	10		
0,367	21	0	0,358368	0,933580	0,383864	2,605089	0	69	1,204
		10	0,361082	0,932534	0,387205	2,582609	50		
		20	0,363793	0,931480	0,390554	2,560465	40		
		30	0,366501	0,930418	0,393911	2,538648	30		
		40	0,369206	0,929348	0,307275	2,517151	20		
		50	0,371908	0,928270	0,400647	2,495966	10		
0,384	22	0	0,374607	0,927184	0,404026	2,475087	0	68	1,187
		10	0,377302	0,926090	0,407414	2,454506	50		
		20	0,379994	0,924989	0,410810	2,434217	40		
		30	0,382683	0,923880	9,414214	2,414214	30		
		40	0,385369	0,922762	0,417626	2,394489	20		
		50	0,388052	0,921638	0,421046	2,375037	10		
0,401	23	0	0,390731	0,920505	0,424475	2,355852	0	7	1,169
		10	0,393407	0,919364	0,427912	2,336929	50		
		20	0,396080	0,918216	0,431358	2,318261	40		
		30	0,398749	0,917060	0,434812	2,299843	30		
		40	0,401415	0,915896	0,438276	2,281669	20		
		50	0,404078	0,914725	0,441748	2,263736	10		
Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.	Дуг въ дол. г

ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ЧЕРЕЗЪ КАЖДЫЯ ДЕСЯТЬ МИНУТЪ

и величина дугъ, въ доляхъ радіуса.

Дуг въ дол. г.	G	M	Sinus.	Cosinus.	Tang	Cotang	M.	G	Дуг въ дол. г.
0,419	24	0	0,406737	0,913545	0,445229	2,246037	0	66	1,152
		10	0,409392	0,912358	0,448719	2,228568	50		
		20	0,412045	0,911164	0,452218	2,211323	40		
		30	0,414693	0,909961	0,455726	2,194300	30		
		40	0,417339	0,908751	0,459244	2,177492	20		
		50	0,419980	0,907533	0,462771	2,160896	10		
0,436	25	0	0,422618	0,906308	0,466308	2,144507	0	65	1,134
		10	0,425253	0,905075	0,469854	2,128321	50		
		20	0,427884	0,903834	0,473410	2,112335	40		
		30	0,430511	0,902585	0,476976	2,096544	30		
		40	0,433135	0,901329	0,480551	2,080944	20		
		50	0,435755	0,900065	0,484137	2,065532	10		
0,454	26	0	0,438371	0,898794	0,487733	2,050304	0	64	1,117
		10	0,440984	0,897515	0,491339	2,035257	50		
		20	0,443593	0,896220	0,494955	2,020386	40		
		30	0,446198	0,894934	0,498582	2,005690	30		
		40	0,448799	0,893633	0,502219	1,991164	20		
		50	0,451397	0,892323	0,505867	1,976805	10		
0,471	27	0	0,453991	0,891007	0,509525	1,962611	0	63	1,100
		10	0,456580	0,889682	0,513195	1,948577	50		
		20	0,459167	0,888350	0,516876	1,934702	40		
		30	0,461749	0,887011	0,520567	1,920982	30		
		40	0,464327	0,885664	0,524270	1,907415	20		
		50	0,466901	0,884310	0,527984	1,893997	10		
0,489	28	0	0,469472	0,882948	0,531709	1,880727	0	62	1,082
		10	0,472038	0,881578	0,535447	1,867600	50		
		20	0,474600	0,880201	0,539195	1,854616	40		
		30	0,477159	0,878817	0,542956	1,841771	30		
		40	0,479713	0,877425	0,546728	1,829063	20		
		50	0,482263	0,876026	0,550513	1,816489	10		
0,506	29	0	0,484810	0,874620	0,554310	1,804048	0	61	1,065
		10	0,487352	0,873206	0,558118	1,791736	50		
		20	0,489890	0,871784	0,561939	1,779552	40		
		30	0,492424	0,870356	0,565773	1,767494	30		
		40	0,494953	0,868920	0,569619	1,755559	20		
		50	0,497479	0,867476	0,573478	1,743745	10		
0,524	30	0	0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	0	60	1,047
		10	0,502517	0,864567	0,581235	1,720474	50		
		20	0,505030	0,863102	0,585134	1,709012	40		
		30	0,507538	0,861629	0,589045	1,697663	30		
		40	0,510043	0,860149	0,592970	1,686426	20		
		50	0,512543	0,858662	0,596908	1,675299	10		
0,541	31	0	0,515038	0,857167	0,600861	1,664280	0	59	1,030
		10	0,517529	0,855666	0,604827	1,653366	50		
		20	0,520016	0,854156	0,608807	1,642558	40		
		30	0,522499	0,852640	0,612801	1,631852	30		
		40	0,524977	0,851117	0,616810	1,621247	20		
		50	0,527450	0,849586	0,620832	1,610742	10		
Дуг въ дол. г.	G.	M	Cosinus.	Sinus.	Cotang	Tang	M	G.	Дуг въ дол. г.

ТАБЛИЦЫ НАТУРАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ

и величина дугъ, въ доляхъ радіуса.

Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.
0,559	32	0	0,529919	0,848048	0,624869	1,600335	0	58	1,012
		10	0,532384	0,846503	0,628921	1,590024	50		
		20	0,534844	0,844951	0,632988	1,579808	40		
		30	0,537300	0,843391	0,637070	1,569686	30		
		40	0,539751	0,841825	0,641167	1,559655	20		
		50	0,542197	0,840251	0,645280	1,549716	10		
0,576	33	0	0,544639	0,838671	0,649408	1,539865	0	57	0,995
		10	0,547076	0,837083	0,653551	1,530102	50		
		20	0,549509	0,835488	0,657710	1,520426	40		
		30	0,551937	0,833886	0,661886	1,510835	30		
		40	0,554360	0,832277	0,666077	1,501328	20		
		50	0,556779	0,830661	0,670285	1,491904	10		
0,593	34	0	0,559193	0,829038	0,674509	1,482561	0	56	0,977
		10	0,561602	0,827407	0,678749	1,473208	50		
		20	0,564007	0,825770	0,683007	1,464115	40		
		30	0,5 6406	0,824126	0,687281	1,455009	30		
		40	0,568801	0,822475	0,691573	1,445980	20		
		50	0,571191	0,820817	0,695881	1,437027	10		
0,611	35	0	0,573576	0,819152	0,700208	1,428148	0	55	0,960
		10	0,575957	0,817480	0,704552	1,419343	50		
		20	0,578332	0,815801	0,708913	1,410610	40		
		30	0,580703	0,814116	0,713293	1,401948	30		
		40	0,583069	0,812423	0,717691	1,393357	20		
		50	0,585429	0,810723	0,722108	1,384835	10		
0,628	36	0	0,587785	0,809017	0,726543	1,376382	0	54	0,942
		10	0,590136	0,807304	0,730996	1,367996	50		
		20	0,592482	0,805584	0,735469	1,359676	40		
		30	0,594823	0,803857	0,739961	1,351422	30		
		40	0,597159	0,802123	0,744472	1,343233	20		
		50	0,599489	0,800383	0,749003	1,335108	10		
0,646	37	0	0,601815	0,798636	0,753554	1,327045	0	53	0,925
		10	0,604136	0,796882	0,758125	1,310044	50		
		20	0,606451	0,795121	0,762716	1,311105	40		
		30	0,608761	0,793353	0,767327	1,303225	30		
		40	0,611067	0,791580	0,771959	1,295406	20		
		50	0,613367	0,789798	0,776612	1,287645	10		
0,663	38	0	0,615662	0,788011	0,781286	1,279942	0	52	0,908
		10	0,617951	0,786217	0,785981	1,272296	50		
		20	0,620236	0,784416	0,790698	1,264706	40		
		30	0,622515	0,782608	0,795436	1,257172	30		
		40	0,624789	0,780794	0,800196	1,249693	20		
		50	0,627057	0,778973	0,804979	1,242269	10		
0,681	39	0	0,629320	0,777146	0,809784	1,234897	0	51	0,890
		10	0,631578	0,775312	0,814612	1,277579	50		
		20	0,633831	0,773472	0,819463	1,220312	40		
		30	0,636078	0,771625	0,824336	1,213097	30		
		40	0,638320	0,769771	0,829234	1,205933	20		
		50	0,640557	0,767911	0,834155	1,198818	10		
Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang	M.	G.	Дуг. въ дол. г.

ТАБЛИЦЫ НАТУРАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ

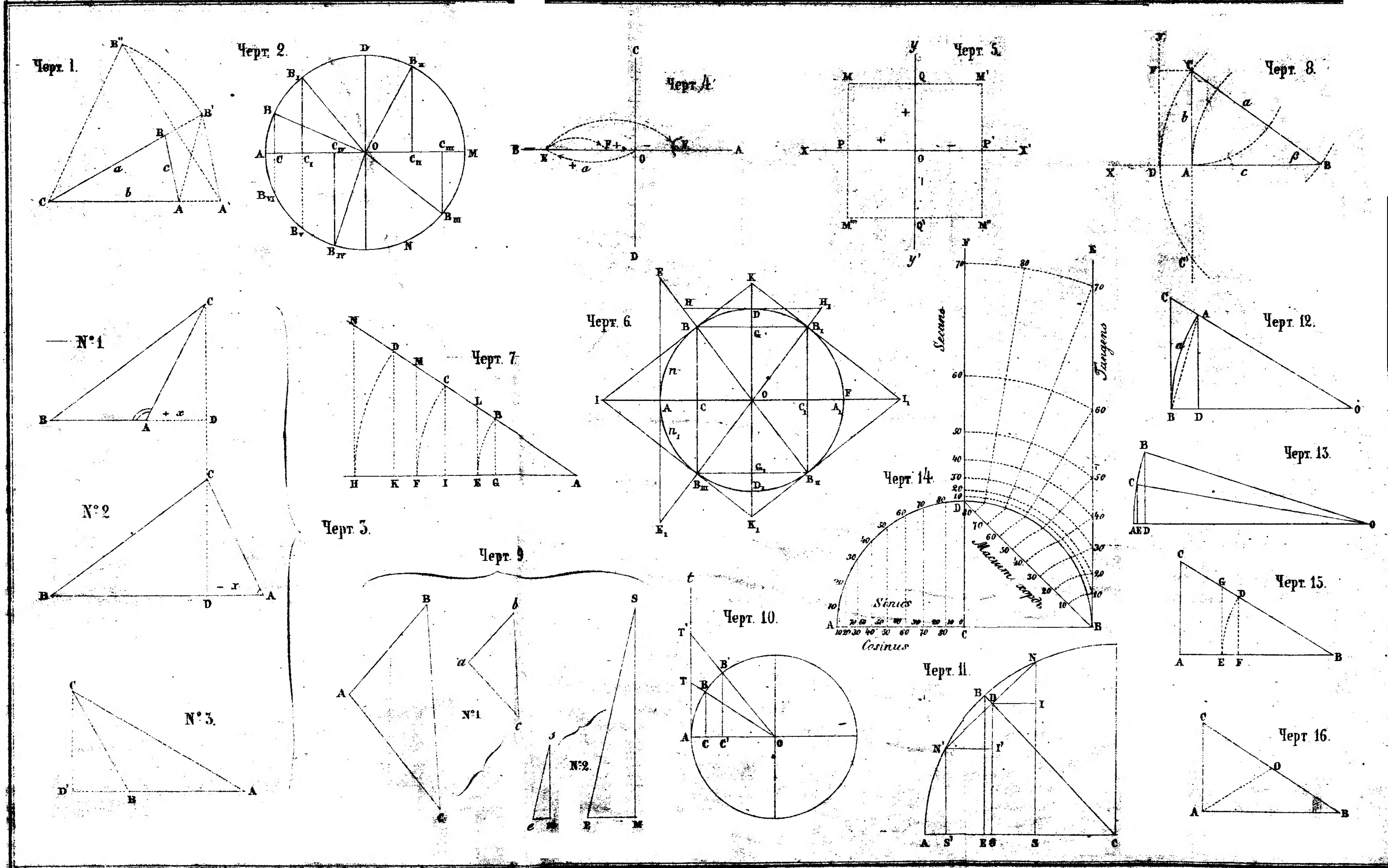
и величина дугъ, въ доляхъ радіуса.

Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.	Дуг въ дол. г.
0,698	40	0	0,642788	0,766044	0,839100	1,191754	0	50	0,873
		10	0,645013	0,764171	0,844069	1,184738	50		
		20	0,647233	0,762292	0,849062	1,177770	40		
		30	0,649448	0,760406	0,854081	1,170850	30		
		40	0,651657	0,758514	0,859124	1,163976	20		
		50	0,653861	0,756615	0,864193	1,157150	10		
0,716	41	0	0,656050	0,754710	0,869287	1,150368	0	49	0,855
		10	0,658252	0,752798	0,874407	1,143633	50		
		20	0,660439	0,750880	0,879553	1,136941	40		
		30	0,662620	0,748956	0,884725	1,130294	30		
		40	0,664796	0,747025	0,889924	1,123691	20		
		50	0,666966	0,745088	0,895151	1,117131	10		
0,733	42	0	0,660131	0,743145	0,900404	1,110612	0	48	0,838
		10	0,671290	0,741195	0,905685	1,104137	50		
		20	0,673443	0,739240	0,910994	1,097702	40		
		30	0,675590	0,737277	0,916331	1,091309	30		
		40	0,677732	0,735310	0,921697	1,084955	20		
		50	0,679868	0,733335	0,927091	1,078642	10		
0,750	43	0	0,681998	0,731354	0,932515	1,072369	0	47	0,820
		10	9,684123	0,729367	0,937968	1,066134	50		
		20	0,686242	0,727374	0,943451	1,059938	40		
		30	0,688355	0,725374	0,948965	1,053780	30		
		40	0,690462	0,723369	0,954508	1,047660	20		
		50	0,692563	0,721357	0,960083	1,041577	10		
0,768	44	0	0,694658	0,719340	0,965689	1,035530	0	46	0,803
		10	0,696748	0,717316	0,971326	1,029520	50		
		20	0,698832	0,715286	0,976996	1,023546	40		
		30	0,700909	0,713250	0,982697	1,017607	30		
		40	0,702981	0,711209	0,988432	1,011704	20		
		50	0,705047	0,709161	0,994199	1,005835	10		
0,785	45	0	0,707107	0,707107	1,000000	1,000000	0	45	0,785
Дуг. въ дол. г.	G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.	Дуг. въ дол. г.

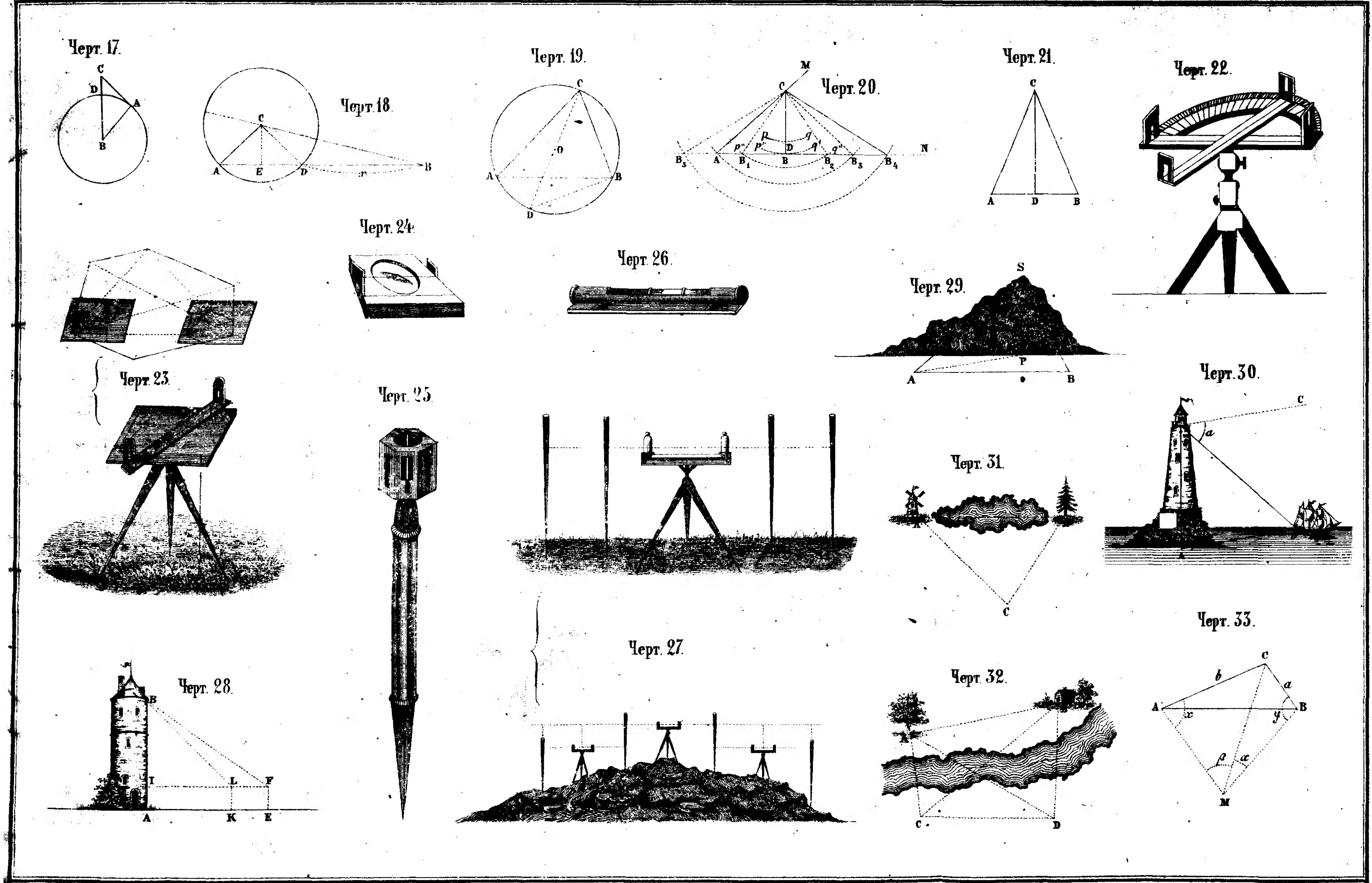
ТАБЛИЦА II.

ДЛИНА ДУГИ ДЛЯ 1′ и 1″.

	для минут.	для секунд.
1	0,000291	0,000005
10	0,002909	0,000048
20	0,005818	0,000097
30	0,008727	0,000145
40	0,011636	0,000194
50	0,014544	0,000242
60	0,017453	0,000291



Лит. В. Прохорова.



Лит. В. Прохорова.